Parametrikus progamozás:

Bevezetés: a probléma megfogalmazása, általános definiálása

A lineáris programozási feladatokban sok paraméter található. Ezek az alábbiak:
- a kapacitás vektor elemei - általában a rendelkezésre álló erforrások korlátosságát jelentik,
- az együttható mátrix elemei - általában az erforrások termékenként felhasznált mennyisége
- a célfüggvény együtthatók - legtöbb esetben az árat jelképezik.

Ezek közül leginkább elforduló vizsgálati eset, a célfüggvény együtthatók változásának hatása a célfüggvény értékére, ami általában az ár változásának bevételünkre, hasznunkra gyakorolt hatását jelenti.
Ezt hívják klasszikus parametrikus lineáris programozás problémának, ha a célfüggvény együtthatók csupán egyetlen (t-vel jelölt) paramétertl függnek és attól is csak lineárisan.

$$c_i(t) = c_{const\,i} + c_{t\,i} \cdot t$$

A klasszikus parametrikus lineáris programozási probléma általános alakja:

$$\frac{\underline{A} \cdot \underline{x} \le \underline{b}}{z(t) = \left(\underline{c}^T_{const} + \underline{c}^T_t \cdot t\right) \cdot \underline{x} = \max.} \qquad \begin{array}{l} \underline{x} \ge \underline{0}\ ;\ \underline{b} \ge \underline{0}\ ;\ \underline{x}\ ,\ \underline{b} \in R^n\ ;\ \underline{A} \in R^{nxn} \\ t \in [a, b] \end{array}$$

Vagy indexes alakban:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot x_i = maximum \qquad t \in [a, b]$$

Megjegyezzük, hogy a parametrikus programozás a kapacitásvektor elemeinek változásának leírására is alkalmas - például az adott feladat duál feladatának felírásának technikával - de jelen anyagunkban ezen módszerek bemutatása nem célunk, vizsgálatainkat csak ezen klasszikus feladatra korlátozzuk, melynek módszere mintapéldákon történ megoldás bemutatási módszer lesz.

A parametrikus programozási feladat optimális megoldásainak Szimplex módszer alapú meghatározási módszerének példán történ bemutatása: 1. példa feladat ("Egyoldalas" normál feladat)

Az 1. fejezetben definiált klasszikus parametrikus programozási feladat optimális megoldása a különböz paraméter tartományokban, - melyeket karakterisztikus intervallumoknak hívunk - különböz $\underline{x}$ és $\underline{u}$ értékeket jelent, a célfüggvény pedig - minden karakterisztikus intervallumban más - függvénye "t"-nek. Ennek meghatározási módszerére lássunk néhány - a különböz eseteket bemutató - példát.

Példa. 1.
Egy makói hagymatermeszt a következ évi vetés tervezésekor az alábbiakat vette figyelembe. Két fajtát tervez termelni, egy – csapadékra, öntözésre érzékenyebb nagyméretű, divatos holland fajtát és az erre érzéketlenebb, kisebb hagyományos makói fajtát.
Összesen 20 hektáron termel, melynek legfeljebb a felén akar külföldi fajtát termelni.
Vetmagra, egyéb anyagköltségre legfeljebb 120 e Ft-ot szán. A makói vetmagja 1000Ft-ba kerül hektáronként, a holland viszont jóval drágább 4000 Ft/ha. A mvelés hektáronkénti költségei viszont a magyar fajtánál magasabbak 4000Ft/ha, míg a hollandnál csak 2 000 Ft/ha. Erre maximum 100 000 Ft-t szán a gazdálkodó.
A várható haszon – a korábbi évek tapasztalata alapján nagyban függ az időjárás csapadékosságától. Mivel a gazdálkodó öntöz rendszert épített ki a teljes területre, így számára a száraz időjárás hatására kialakuló alacsony termésátlagok okozta magas árak kedvezőek. Ezért – nagyon leegyszerűsítve - úgy találja, hogy a hektáronkénti haszna egyetlen – csapadékossági – paramétertl történ lineáris függéssel is leírható, az alábbiakban:

$z(t) = (100 - t) * x1 + (120 - 3\ t) * x2 :$

Ahol a paraméter a [0,20] tartományban mozoghat, vagyis a haszon a makói típuson 80 és 100 e Ft/ha a hollandi típuson pedig 60 és 120 e Ft/ha között mozoghat.
Elemezzük a feladatot, a csapadékosság függvényében milyen megoszlásban kell bevetni a területet és ekkor milyen haszonra számíthat a vállalkozó, ha a t paramétert a [0 , 20] tartományba esnek becsli!

Megjegyzés: Adott évben a 3-6 hónapos idjárás elrejelzés alapján, hogy csapadékos vagy száraz idszak következik-e, a vállalkozó akár megpróbálkozhat a jósolt csapadék mennyiségnek megfelel vetésterületek választásával. De példánk inkább leíró jelleg a paraméter hatásának bemutatására, mintsem gyakorlati.

A feladat lineáris programozási modellje:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\le 20 \\ x_2 &\le 10 \\ x_1 + 4\ x_2 &\le 120 \\ 4\ x_1 + 2\ x_2 &\le 100 \end{aligned}$$

$$z = (100 - t)\ x_1 + (120 - 3\ t)\ x_2 = \max.$$

ahol x_1, x_2, nemnegatív

mely Maple input ablakban is megjelenítésre kerül, hogy a számítási eljárások meghívására lehetség legyen .

$x_1 + x_2 \leq 20,$
$x_2 \leq 10,$
$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 120,$
$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 100$

$(100 - t) \cdot x_1 + (120 - 3 \cdot t) \cdot x_2$

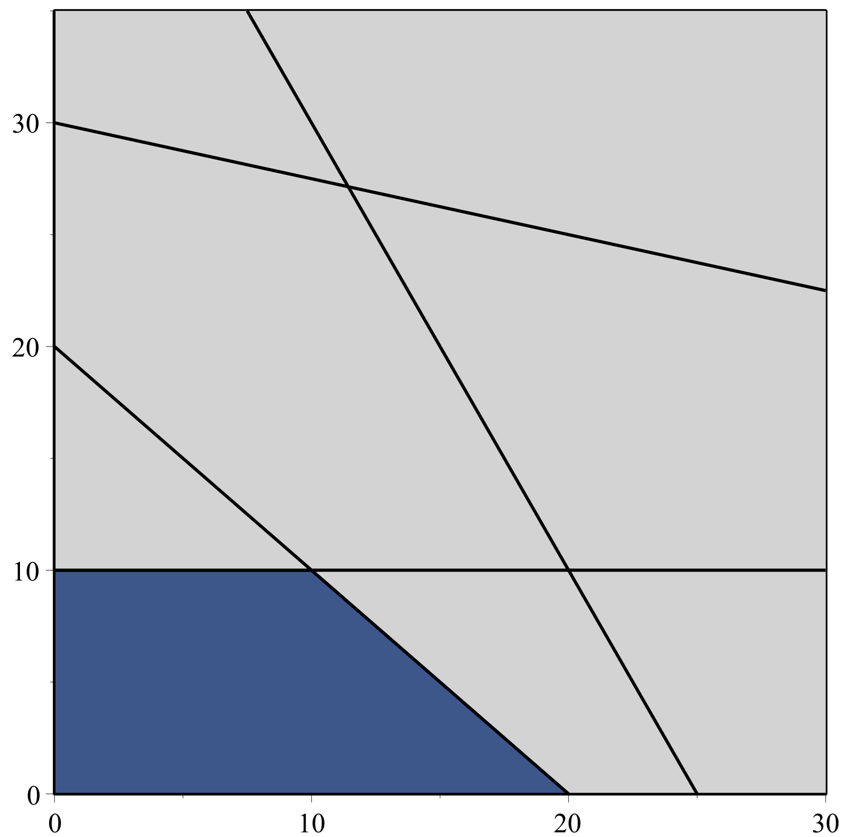
Elemezzük elször a feladat feltételi egyenlet részét a lineáris programozási feladat megszokott mátrixos felírásával illetve grafikus reprezentációjával a Maple segítségével :

paramInput1( ) :
induloTabla( );
$A := \{x1 + x2 \leq 20, x2 \leq 10, x1 + 4 * x2 \leq 120, 4 * x1 + 2 * x2 \leq 100\};$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 20 \\ u_2 & 0 & 1 & 10 \\ u_3 & 1 & 4 & 120 \\ u_4 & 4 & 2 & 100 \\ -z & 100 - t & 120 - 3\,t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{x2 \leq 10, x1 + x2 \leq 20, x1 + 4\,x2 \leq 120, 4\,x1 + 2\,x2 \leq 100\} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

with(*plots*) :
inequal($\{x1 + x2 \leq 20, x2 \leq 10, x1 + 4 * x2 \leq 120, 4 * x1 + 2 * x2 \leq 100\}, x1 = 0\,..30, x2 = 0\,..35$);



Tekintsük t = 0 -t és a t=20 -at a várható határokat. Ekkor a célfüggvény konstans, melyet a Maple szimbolikus lehetségével számítani is tudunk, és használható a Maple LP megoldó rutinja is:

$t := 0:$
$ztartbal = (100 - t) * x1 + (120 - 3\ t) * x2;$
$t := 20:$
$ztartjobb = (100 - t) * x1 + (120 - 3\ t) * x2;$

$$ztartbal = 100\ x1 + 120\ x2$$

$$ztartjobb = 80\ x1 + 60\ x2 \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

$with(Optimization):$
$LPSolve(100 \cdot x1 + 120 \cdot x2, \{x1 + x2 \le 20, x2 \le 10, x1 + 4 * x2 \le 120, 4 * x1 + 2 * x2 \le 100, 0 \le x1, 0 \le x2\}, x1 = 0\,..20, x2 = 0\,..10, maximize);$

$$[2200.00000010331, [x1 = 10.0000000010331, x2 = 10.]] \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

$LPSolve(80 * x1 + 60 * x2, \{x1 + x2 \le 20, x2 \le 10, x1 + 4 * x2 \le 120, 4 * x1 + 2 * x2 \le 100, x1 \ge 0, x2 \ge 0\}, maximize);$

$$[1600., [x1 = 20., x2 = -4.45014771701441\ 10^{-307}]] \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

$\underline{x}_0^T$ (t=0) = [10 , 10] z (t = 0) = 100 x1 + 120 x2 = 2 200

$\underline{x}_1^T$ (t=20) = [20 , 0] z (t = 20) = 80 x1 + 60 x2 = 1 600

Megállapíthatjuk, hogy adott "t"paraméter esetére - az eddig megismert módszerrel - mindig meg tudjuk határozni a feladat optimális megoldását (z-t és x-et). Azonban feladatunk nem ez, hanem általánosan meghatározni az optimális megoldást, a "t" paraméter függvényében.
Nézzük most ezt:
Mj: egyáltalán nem biztos, hogy a két célfüggvény értéket lineárisan összekötve kapjuk a célfüggvény "t"-tl való függését, és azt pedig, hogy "hol ugrik át"a megoldás adott els megoldásból ($\underline{x}_0$ - pontból) egy következbe ($\underline{x}_1$- be) az fleg nem tudható. (Ez kidolgozott példán majd látszik is.)

A feladat induló táblája:
Automatikusan az input ablakban megadott feladatra az input (paramInput1) és az induloTabla nev eljárások meghívásával:

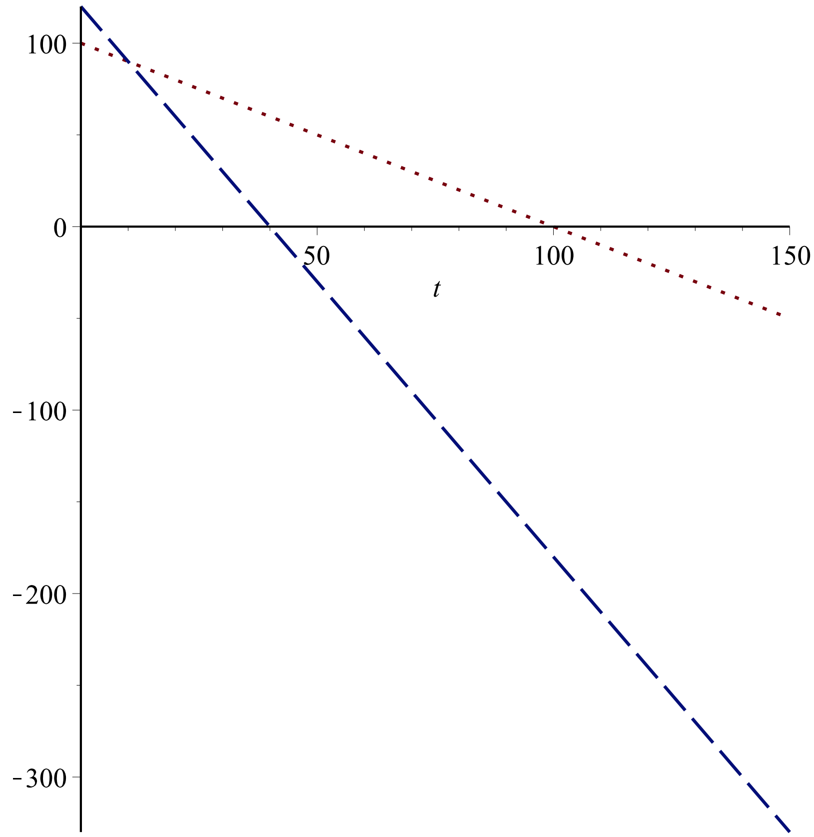
paramInput1( ) :
induloTabla( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 20 \\ u_2 & 0 & 1 & 10 \\ u_3 & 1 & 4 & 120 \\ u_4 & 4 & 2 & 100 \\ -z & 100-t & 120-3t & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5)}$$

A normál Szimplex módszer esetünkben alkalmas a probléma kezelésére – mivel normál (csupa kisebb egyenls) lineáris programozási feladatunk van. Azonban mivel a célfüggvény sora paramétert is tartalmaz, így elfordulhat az az eset is, hogy a célfüggvény együtthatók már az els táblában mind nem pozitívak.
Vizsgáljuk meg esetünkben létrejöhet-e a világnak olyan állapota amikor ez áll fenn! Ehhez a célfüggvény együtthatók egyszerre nem pozitív voltát kell feltételeznünk és az így adódó egyenltlenségeket egyszerre megoldanunk.

$100 - t \le 0$
$120 - 3t \le 0$

Ezek a nem pozitivitási tartományok. Határozzuk meg most ezek közös részét. Rajzoljuk fel ket elször: (A Maple, plot utasításának segítségével)
with(*plots*) : *unassign*('*t*') :
plot([100 - *t*, 120 - 3 * *t*], *t* = 0 .. 150, *linestyle* = [*dot*, *dash*]);



Ezen az ábrán látható, hogy a második együttható 40 felett válik negatívvá, az els viszont csak 100 felett. Vagyis mindkett együtt 100 felett negatív:

$$100 \le t$$

Úgy is fogalmazhatjuk, hogy a negativitási tartomány határát az els $c_1(t)$ együttható adja.

Ezt nemcsak kézi számítással de a Maple - LinearMultivariateSystem({feltétel1,feltétel2}, [változó]); - utasításával is meghatározhatjuk:

Mj: Minden "t"-nek értéket adó utasítás után "t"-t ismét "változóvá kell tenni" az unassign('t') utasítással.

$with(SolveTools[Inequality]):$
$st := LinearMultivariateSystem(\{100 - t \le 0, 120 - 3 * t \le 0\}, [t]);$
$unassign('t'):$

$$\{[\{100 \le t\}]\} \quad \textbf{(1.2.6)}$$

Az els tábla optimális volta azt jelenti, hogy - az adott paraméter tartományban - bármely tevékenység végzése esetén csak veszteséget termelnénk, vagyis legjobb ha semmit nem termelünk. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ és $z = 0$ - ami az els táblából leolvasható megoldás.

Meghatároztuk tehát a $100 \le t$ esetén a megoldást, de számunkra nem ezek a "t" értékek, hanem a

$t \in [0, 20]$ beliek az érdekesek.
Mj: Általánosságban célunk lehet az összes lehetséges t paraméter érték mellett meghatározni a célfüggvény és az $\underline{x}$ értékét. Tegyük most ezt, mivel ebbl részeredményként kiadódik a kívánt tartománybeli eredmény.

Hogyan lépjünk tovább ebbl a helyzetbl?
A 100 alatti paramétereknél a $c_1(t)$ együttható válik pozitívvá, (ez adta a tartomány határát) így – ha ilyen paraméterekre kívánjuk a megoldást meghatározni, e felett kell báziscsere elemet választani. (Mj : Mivel 100 alatti értékekre ez a pozitív. ($c_2(t)$ továbbra is ($t = 40$ -ig.) negatív.)
Természetesen a legszkebb keresztmetszet feletti választás szabályát most is be kell tartanunk. Ezért az (x_1, u_1) báziscserét jelent 1-es számot választjuk.
A báziscserét az elre megírt - már megismert - eljárással hajtjuk végre.
unassign('*t*') :
bazisChangeV(u_1, x_1);

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & x_2 & b \\ x_1 & 1 & 1 & 20 \\ u_2 & 0 & 1 & 10 \\ u_3 & -1 & 3 & 100 \\ u_4 & -4 & -2 & 20 \\ -z & -100+t & 20-2t & -2000+20t \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.7)}$$

Így megkaptuk a 2. Szimplex táblát, melyre szintén elfordulhat, hogy minden célfüggvényegyüttható egyszerre nem pozitív. Ennek vizsgálata az egyenltlenségek megoldását jelenti:

$$-100 + t \leq 0$$
$$20 - 2t \leq 0$$

Ezt nemcsak az - elzekben használt - Maple utasítással de - az ablakból automatikusan beolvasott feladatra - megírt eljárással is meghatározhatjuk, az alábbiakban:
optTartNormal( );

$$[10, 100] \quad \textbf{(1.2.8)}$$

A kapott tartomány a $10 \leq t \leq 100$.
Ezen paraméter tartományban ez a tábla optimális, így errl kell leolvasnunk a megoldást.
$\underline{x}^T = [20 , 0]$ és $z = 2\,000 - 20\,t$
Mj: $x_2 = 0$ (mivel "fenn van" nincs benne a bázisban)

Ennek azon határát amelyiknél ki akarunk lépni a második - $c_2(t)$ - együttható adja, ezért e felett kell pivot elemet választanunk. Ez pedig az (u_2 , x_2) cserét jelent 1-es.
bazisChangeV(u_2, x_2);

$$\begin{bmatrix} 2 & u_1 & u_2 & b \\ x_1 & 1 & -1 & 10 \\ x_2 & 0 & 1 & 10 \\ u_3 & -1 & -3 & 70 \\ u_4 & -4 & 2 & 40 \\ -z & -100+t & -20+2\,t & -2200+40\,t \end{bmatrix} \tag{1.2.9}$$

Megvizsgálva ismételten, hogy ezen tábla mikor optimális a következ egyenltlenségek közös tartományát kell meghatároznunk:

$$-100 + t \le 0$$
$$-20 + 2t \le 0$$

optTartNormal( );

$$[-\infty, 10] \tag{1.2.10}$$

Az optimalitási tartomány: [-∞ , 10]
Ahol a megoldás: $\underline{x}^T$=[10 , 10] és z = 2 200 – 40 t.

Eredményeinket táblázatban foglalhatjuk össze:
Fenti tartományokat ahol nemcsak csak az optimalitást jelent pont változik meg hanem a célfüggvény meredeksége is, karakterisztikus pontoknak az általuk meghatározott intervallumokat, karakterisztikus intervallumoknak nevezzük, mivel ezekben a megoldás milyensége, karakterisztikája más és más.

Karakterisztikus intervallumok : $a \le t \le b$	$z(t)$	$\underline{x}_{optimal}$
$-\infty < t < 10$	$2200 - 40 \cdot t$	$\underline{x}_1$:= [10 , 10]
$10 < t < 100$	$2000 - 20\,t$	$\underline{x}_2$:= [20 , 0]
$100 < t < \infty$	0	$\underline{x}_3$:= [0 , 0]

A karakterisztikus pontokban - melyek a karakterisztikus intervallumokat választják el – a feladatnak alternatív optimum megoldásai vannak az alábbi okból következen. Mivel azon pontban az egyik – éppen a karakterisztikus pontot szolgáltató – célfüggvény együttható nulla értéket vesz fel. A nulla felett báziscserét végre hajtva pedig éppen alternatív optimumként jelenik meg, azon megoldás, amely a karakterisztikus pont másik oldalán optimálisként.

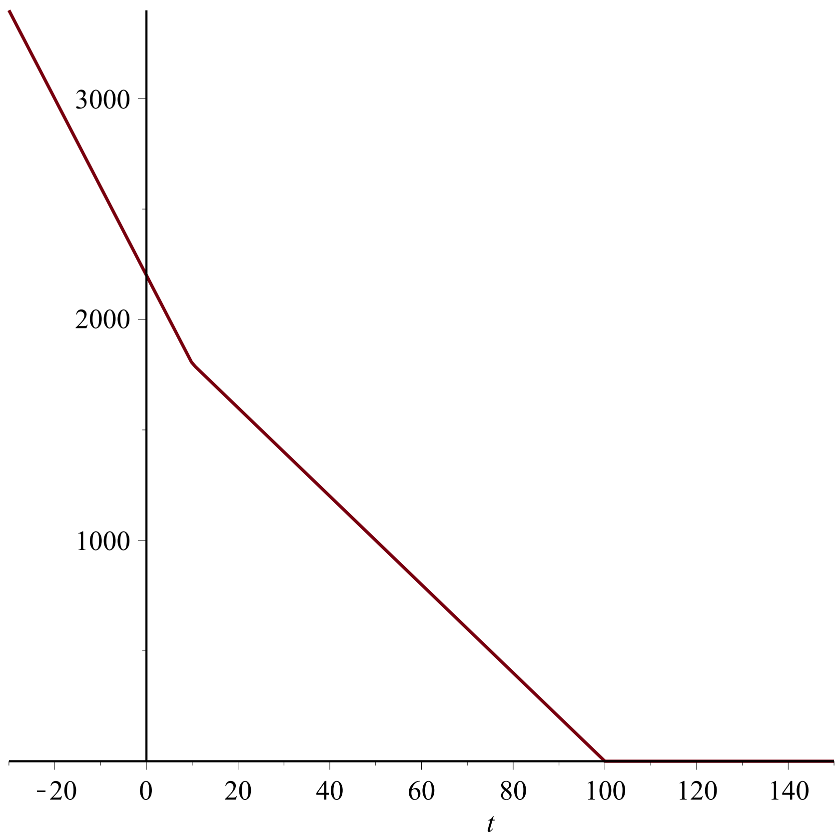
Karakterisztikus pontok :	$z(t)$	$\underline{x}_{optimal1}$, $\underline{x}_{optimal2}$
$t = 10$	$2200 - 40 \cdot 10 = 1800$	[10 , 10] , [20 , 0]
$t = 100$	$2000 - 20 \cdot 100 = 0$	[20 , 0] , [0 , 0]

A célfüggvényre vonatkozó eredményeinket pedig egyetlen függvénnyel is megadhatjuk, és ezt grafikonon szemléltethetjük is:

$$z := \begin{cases} 2200 - 40\cdot t & t < 10 \\ 2000 - 20\cdot t & 10 \le t \le 100 \\ 0 & 100 < t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2200 - 40\,t & t < 10 \\ 2000 - 20\,t & 10 \le t \textbf{ and } t \le 100 \\ 0 & 100 < t \end{cases} \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

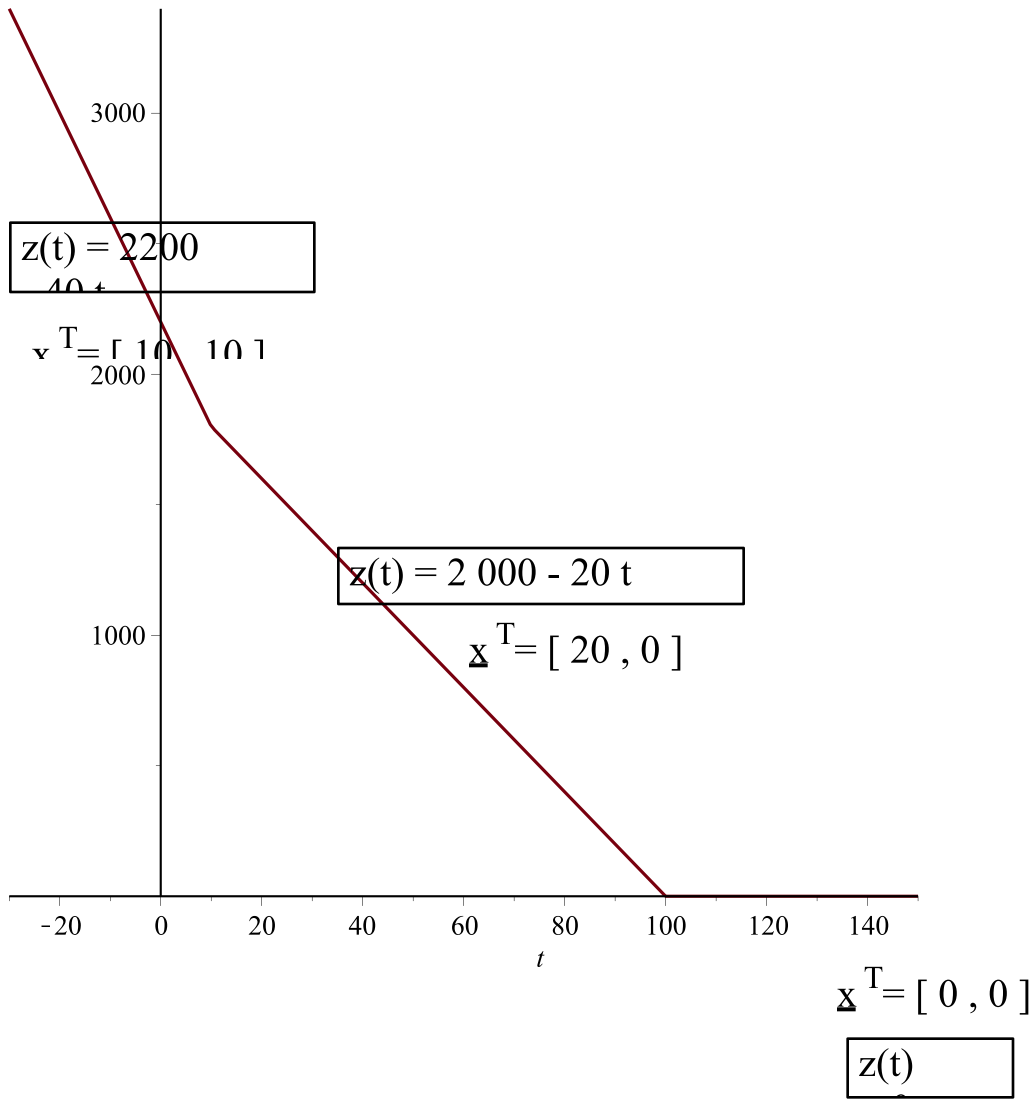
$plot(z, t = -30..150);$



Ezen grafikonon jól látható, hogy adott "t" paraméter értéknél mennyi lesz a célfüggvény értékünk a táblázatból pedig, hogy ezt milyen x esetén tudjuk elérni.
(Mj: papíron történ megjelenítés esetén az x -eket a grafikon megfelel tartományába szoktuk beírni, mint az az alábbi (képként idehozott) ábrán is látható. Hallgatóinktól dolgozataikban ezt szoktuk elvárni.)

A célfüggvény grafikonjára a Maple rajzolási lehetségével a függvények képleteit és az optimális pontok értékeit is elhelyezhetjük.

$plot(z, t=-30..150);$

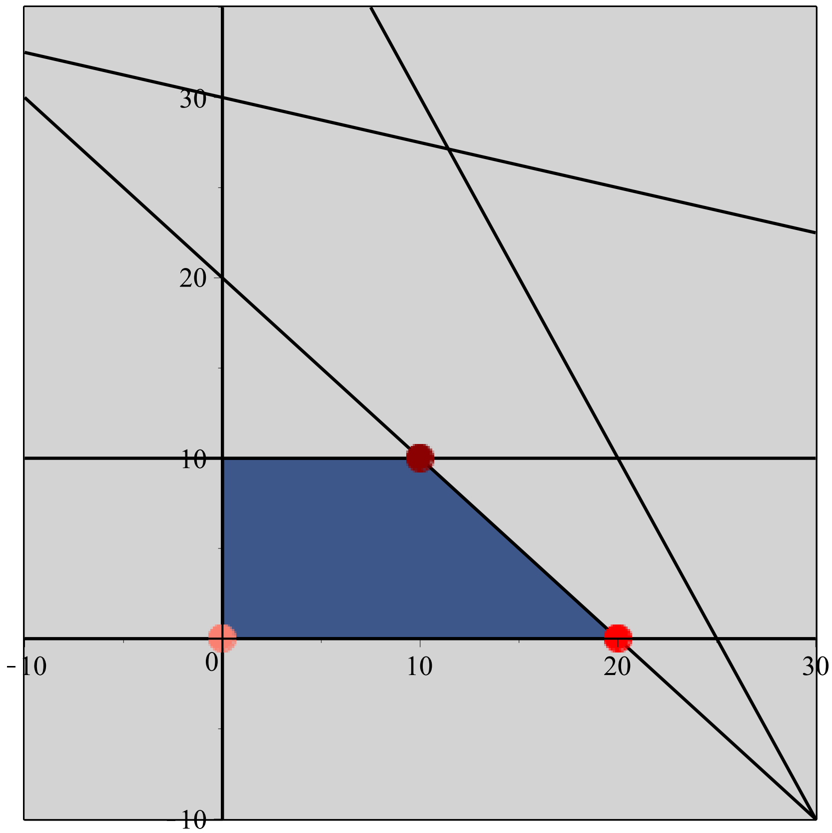


Másfajta (új, az irodalomban a szerz által meg nem talált) megjelenítést jelent ha a megengedhet megoldások tartományán rajzoljuk be az optimalitást jelent <u>x</u> pontokat és a célfüggvény egyeneseit a karakterisztikus pontok beli "t" értékekre, illetve - és + ∞-re.

A megengedhet megoldások tartománya rajta rendre az optimális megoldásokat jelent <u>x</u> pontokkal:

$tartomány := inequal(\{x1 + x2 \le 20, x2 \le 10, x1 + 4 * x2 \le 120, 4 * x1 + 2 * x2 \le 100, 0 \le x1, 0 \le x2\}, x1 = -10..30, x2 = -10..35) :$

pont1 := *pointplot*(⟨10, 10⟩, *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 25, *color* = "DarkRed") :
pont2 := *pointplot*(⟨20, 0⟩, *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 25, *color* = "red") :
pont3 := *pointplot*(⟨0, 0⟩, *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 25, *color* = "Salmon") :
display(*tartomány*, *pont1*, *pont2*, *pont3*);



Az egyenesek felrajzolásához viszont ki kell számítanunk az optimális pontokon átmen célfüggvények egyenleteit.
Egy adott [x10 , x20] ponton átmen - f(x1,x2) = const. implicit módon megadott - egyenes általános egyenlete:

A* x1 + B * x2 = A*x10 + B * x20

Pontjaink rendre: $\underline{x}_1$ = [10 , 10] , $\underline{x}_2$ = [20 , 0] , $\underline{x}_3$ = [0 , 0]
Egyeneseink $\underline{x}_i$ - n átmen t-vel parametrizált egyenlete:
(mj: az alábbi képlet, nem Maple kód!)

z(t) = (100 - t) * x1 + (120 - 3*t) * x2 = (100 - t) * x1i + (120 - 3 * t) * x2i

x2-re mint függ változóra átrendezve (mivel az ábrázolás az x1 , x2 síkon történik és x2 a függ változó)
(mj: ez is képlet, nem Maple kód!)

$$x2(x1, t) := \frac{((100-t)\cdot x1i + (120-3\cdot t)\cdot x2i - (100-t)\cdot x1)}{(120-3\cdot t)}$$

A Maple lehetséget ad még a t = - ∞ és + ∞-nél történ számításra is, mely tulajdonképpen határérték számítás:
(Mj: ezek is képletek nem végrehajtandó Maple programok)

$$x2(t=-infinity) := \lim_{t\to-\infty} \frac{((100-t)\cdot x11 + (120-3\cdot t)\cdot x21 - (100-t)\cdot x1)}{(120-3\cdot t)}$$

illetve:

$$x2(t=+infinity) := \lim_{t\to+\infty} \frac{((100-t)\cdot x13 + (120-3\cdot t)\cdot x23 - (100-t)\cdot x1)}{(120-3\cdot t)}$$

mivel t = -∞ -nél az egyenes az $\underline{x}_1$ ponton megy át, t = + ∞- n él pedig az $\underline{x}_3$-on.

Mj: Ezen számítás bemutatása azért hasznos hallgatóink számára, mivel a képzésükben a határérték számítás használata ritkán fordul el, most pedig láthatnak egy gyakorlati példát alkalmazására.

$\underline{x}_1$ = [10 , 10] , t = - infinity (mínusz végtelen) , z = x2tminf a jelölés, mely az x2 (t = - infinity) -nek a jelölése. (A jelölés hasonló a többi esetben.)
x2 ($\underline{x}_1$, t = minus infinity) = 40/3 - 1/3 * x1

Maple programja:

$x11 := 10 : x21 := 10 :$
$unassign('t') :$
$$x2minf := \lim_{t\to-\infty} \frac{((100-t)\cdot x11 + (120-3\cdot t)\cdot x21 - (100-t)\cdot x1)}{(120-3\cdot t)};$$

$$\frac{40}{3} - \frac{1}{3}\,x1 \tag{1.2.12}$$

$\underline{x}_1$ = [10 , 10] , t = 10 ,
x2 ($\underline{x}_1$, t = 10) = 20 - x1

Maple Programja:

$x11 := 10 : x21 := 10 :$
$t := 10 :$
$$x2t10 := \frac{((100-t)\cdot x11 + (120-3\cdot t)\cdot x21 - (100-t)\cdot x1)}{(120-3\cdot t)};$$

$$20 - x1 \tag{1.2.13}$$

$\underline{x}_2$ = [20 , 0] , t = 100 , x2 ($\underline{x}_2$, t = 100) = 0 és x2 ($\underline{x}_3$, t = 100) = 0 természetesen.

Maple Programjaik:

$x12 := 20 : x22 := 0 :$
$t := 100 :$
$$x2t100 := \frac{((100 - t)\cdot x12 + (120 - 3\cdot t)\cdot x22 - (100 - t)\cdot x1)}{(120 - 3\cdot t)};$$

$$0 \qquad (1.2.14)$$

$x13 := 0 : x23 := 0 :$
$t := 100 :$
$$x2t100 := \frac{((100 - t)\cdot x13 + (120 - 3\cdot t)\cdot x23 - (100 - t)\cdot x1)}{(120 - 3\cdot t)}$$
$$0 \qquad (1.2.15)$$

$\underline{x}_3$ = [0 , 0]   ,   t = + infinity
x2 ($\underline{x}_3$, t = + infinity) = - 1 /3 x1

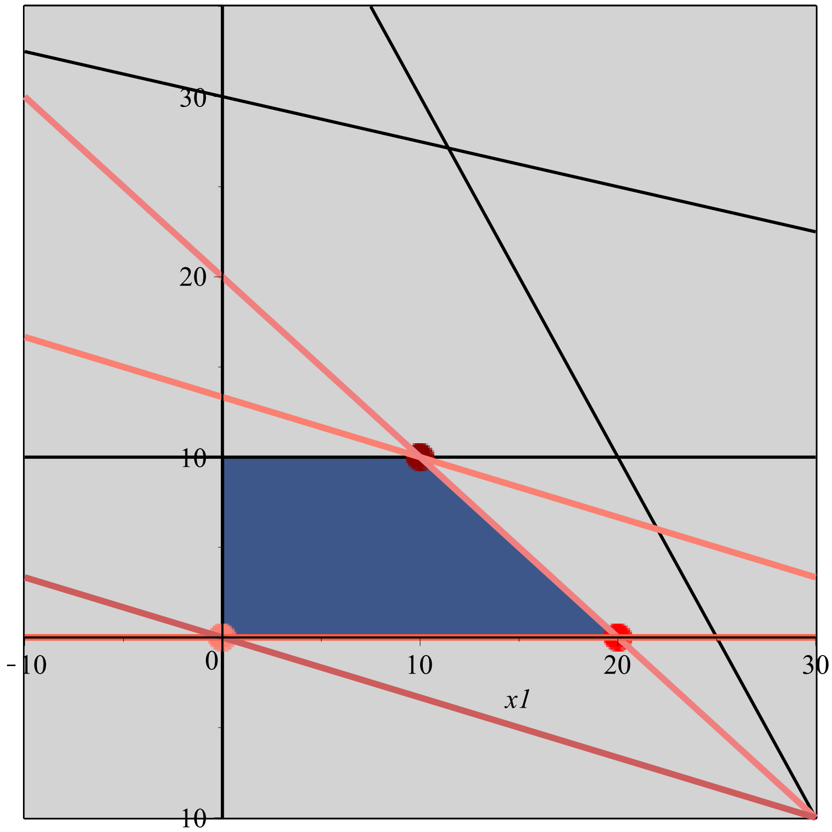
Maple Programja:

$x13 := 0 : x23 := 0 :$
$unassign('t') :$
$$x2pinf := \lim_{t \to \infty} \frac{((100 - t)\cdot x13 + (120 - 3\cdot t)\cdot x23 - (100 - t)\cdot x1)}{(120 - 3\cdot t)};$$

$$-\frac{1}{3}\, x1 \qquad (1.2.16)$$

Most már fel tudjuk rajzolni a megengedhet megoldások tartományán nemcsak az optimális megoldásokat jelent $\underline{x}$ pontokat de a karakterisztikus pontok beli célfüggvény egyeneseket is az alábbiakban:

```
egyenes0 := plot(x2minf, x1 =-10..30, thickness = 3, color = "Salmon") :
egyenes1 := plot(x2t10, x1 =-10..30, thickness = 3, color = "LightCoral") :
egyenes2 := plot(x2t100, x1 =-10..30 , thickness = 3, color = red) :
egyenes3 := plot(x2t100, x1 =-10..30, thickness = 3, color = "Tomato") :
egyenes4 := plot(x2pinf, x1 =-10..30, thickness = 3, color = "IndianRed") :
rajz := display(tartomány, pont1, pont2, pont3, egyenes0, egyenes1, egyenes2, egyenes3,
    egyenes4) : rajz;
```



Táblázattal:

Karakterisztikus pont : $a \le t \le b$	$z(t)$	$\underline{x}_{optimal}$
$t = -\infty$	$x2(t=-\infty) := \frac{40}{3} - \frac{1}{3} \cdot x1$	$\underline{x}_1 := [10, 10]$
$t = 10$	$x2(t=10) := 20 - x1$	$\underline{x}_1 := [10, 10]$ $\underline{x}_2 := [20, 0]$
$t = 100$	$x2(t=100) := 0$	$\underline{x}_2 := [20, 0]$ $\underline{x}_3 := [0, 0]$
$t = +\infty$	$x2(t=+\infty) := -\frac{1}{3} \cdot x1$	$\underline{x}_3 := [0, 0]$

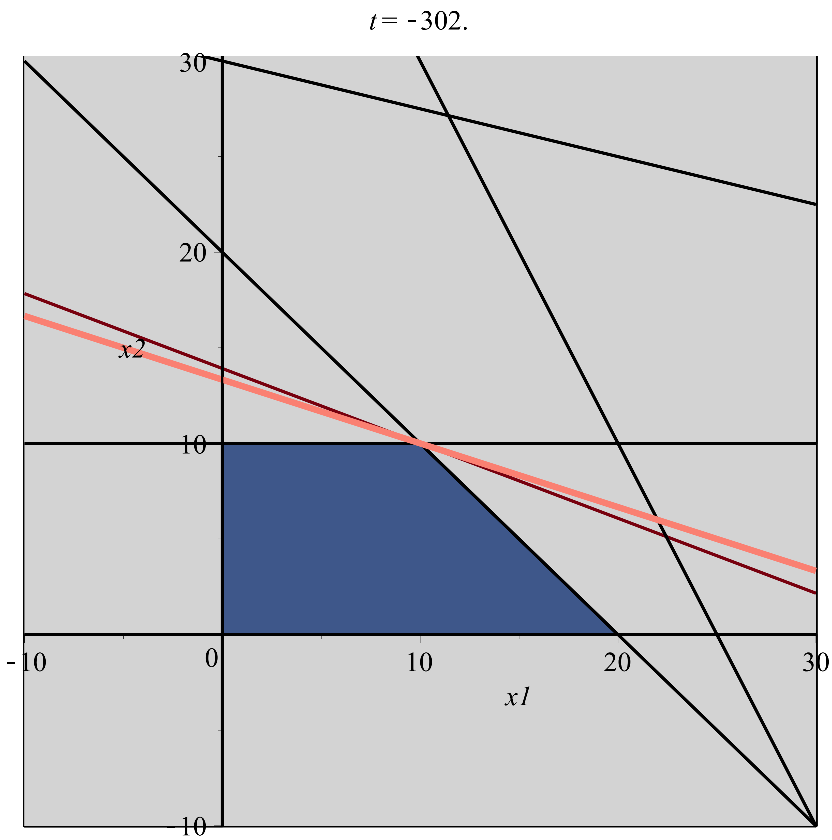
A Maple animációs parancs pedig lehetvé teszi számunkra a célfüggvény egyenesek "t" függvényében történ folytonos változásának szemléltetését is, amihez nem a fenti alak szükségeltetik - mivel abban éppen - az animáció paramétere - a "t" nem szerepel, hanem a korábban számított x2(x1,t) alak.

Az animáció a t ∈[- ∞ , 10] tartományban:
Mj: Az animáció a képre történ klikkelésre (fenn) megjelen animáció menüsorban a lejátszás gomb megnyomására indul.

$$tartomány1 := display(tartomány, egyenes0) :$$

$$tartanimparam1 := animate\left(plot, \left[\frac{(100-t)\cdot x11 + (120-3\cdot t)\cdot x21 - (100-t)x1}{(120-3\cdot t)}, x1 = -10 ..30, x2 = -10 ..30\right], t = -302 ..10, trace = 6, frames = 6, background = tartomány1\right) :$$

$$tartanimparam1;$$



Mj: Mivel az animáció képei és nyomai (frames , trace) egyenközen generálódnak és nagy "t"-

kre a nyomok vonalvastagságon belül esnek ezért technikánk az, hogy a mínusz végtelenhez tartozó egyenest (külön nem animáltan) megjelenítjük a tartományon, az animációt viszont csak kisebb (-302 -es, hogy a "lépésközzel"a nyomok számával osztható legyen) értékrl indítjuk. Láthatóan azonban még így is az elején srk az egyenesek a végén pedig nagyon nagy lépéssel éri el a t = 10-es értéket.
Ezért két tartománnyal próbáljuk meg: [- 302 , -14] és [-14 , +10] (Azért ilyen értékek, hogy a tartomány osztható legyen a lépésközök számával.)

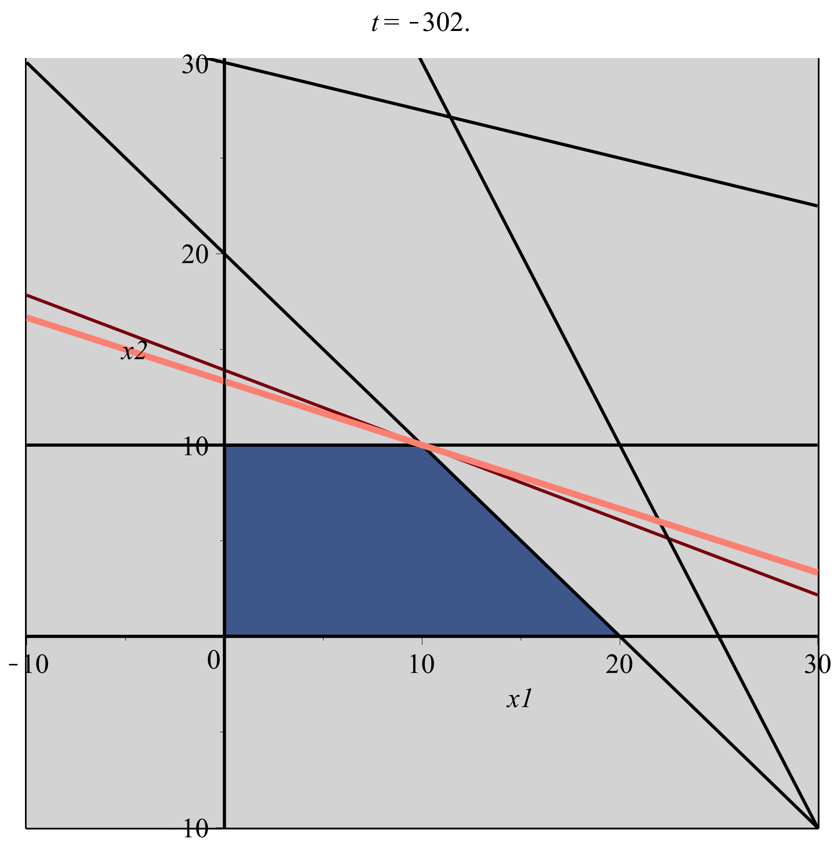
$$tartanimparam1 := animate\left(plot, \left[\frac{(100-t)\cdot x11+(120-3\cdot t)\cdot x21-(100-t)x1}{(120-3\cdot t)}, x1=-10..30, x2=-10..30\right], t=-302..10, trace=6, frames=6, background=tartomány1\right):$$

$tartanimparam1$:

$$tartanimparam12 := animate\left(plot, \left[\frac{(100-t)\cdot x11+(120-3\cdot t)\cdot x21-(100-t)x1}{(120-3\cdot t)}, x1=-10..30, x2=-10..30\right], t=-14..10, trace=6, frames=6, background=tartomány1\right):$$

$tartanimparam12$:

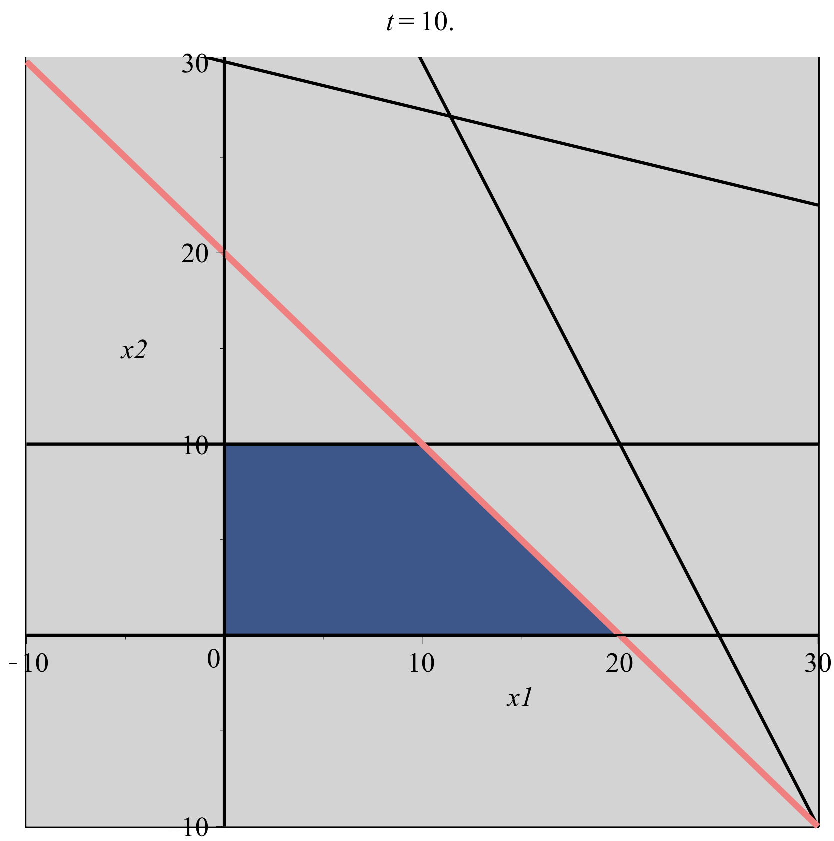
$plots[display]([tartanimparam1, tartanimparam12], insequence=true);$



Ez már egyenközben fedi le a tartományt, viszont az els animáció nyoma eltnik...

A második karakterisztikus intervallumban t ∈ [10 , 100] célszer a nyomok számát megnövelni (12-re) (mivel sokat fordul az egyenes) :

$unassign('t')$:
$tartomány1 := display(tartomány, egyenes1)$:
$tartanimparam2 := animate\left(plot, \left[\frac{(100-t)\cdot x12 + (120-3\cdot t)\cdot x22 - (100-t)x1}{(120-3\cdot t)}, x1 = -10..30, x2 = -10..30\right], t = 10..100, trace = 12, frames = 12, background = tartomány1\right)$:
$tartanimparam2$;



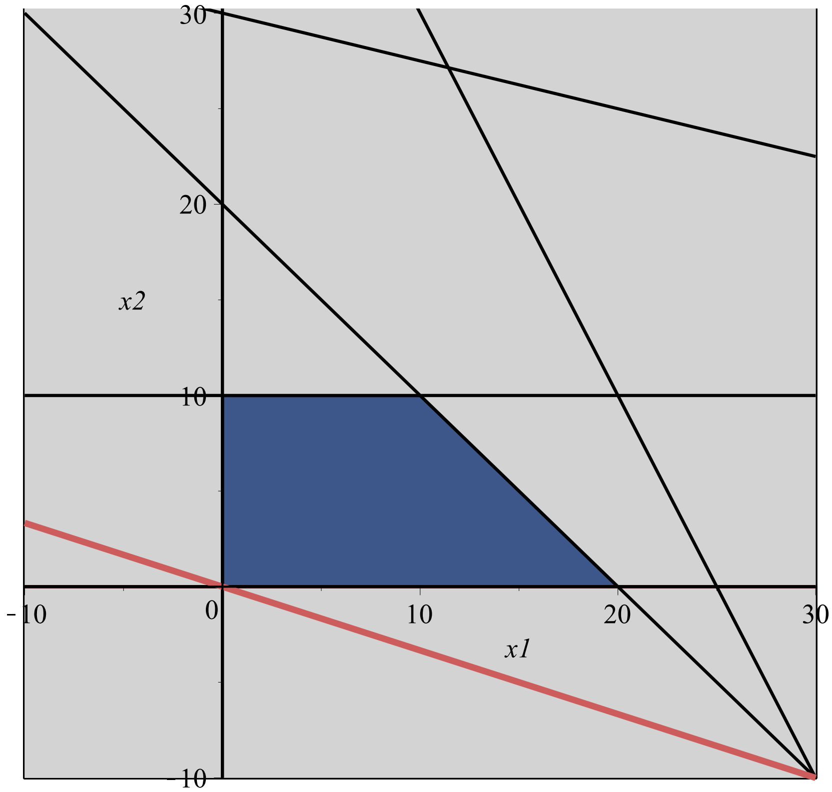
A harmadikban ismételten feltesszük a "t" = + ∞ célfüggvény egyenes megjelenítését is (háttérként) amit ugyan csak a végén ér el az egyenes.

$tartomány3 := display(tartomány, egyenes4)$:
$tartanimparam3 := animate\left(plot, \left[\frac{(100-t)\cdot x13 + (120-3\cdot t)\cdot x23 - (100-t)x1}{(120-3\cdot t)}, x1 =\right.\right.$

$-10..30, x2=-10..30\Big], t=100..280, trace=12, frames=6, background=tartomány3\Big)$:

tartanimparam3;

$t = 100.$



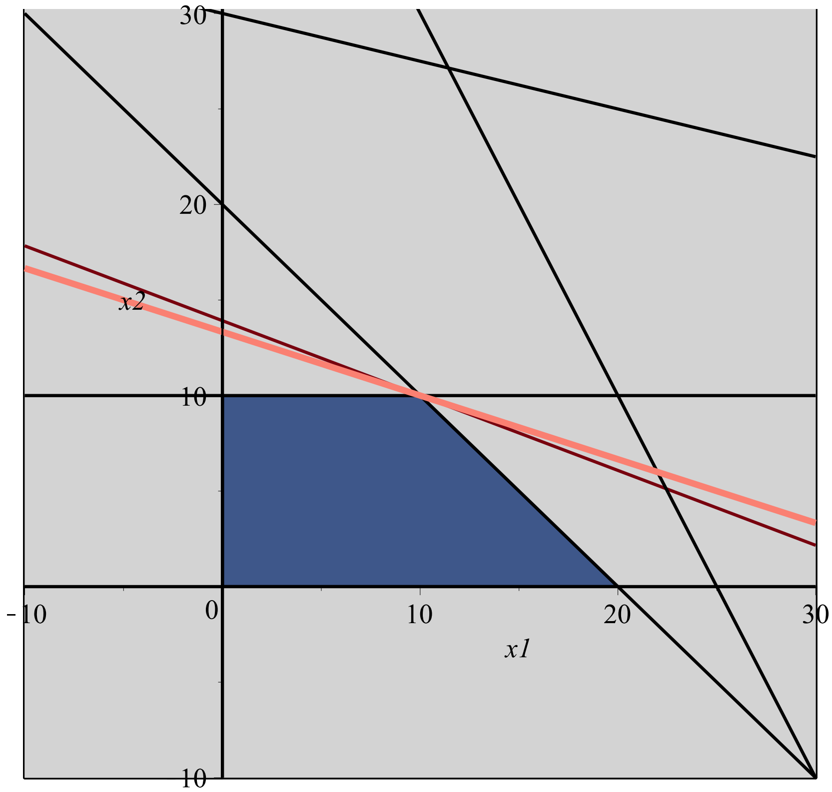
A Maple animációs lehetsége miatt még ennél is többet tehetünk, megadhatjuk a célfüggvény egyenesét a tartományon t = - ∞
-nél is illetve az összes karakterisztikus pontban majd t = +∞ -nél. St animáltan is -∞ tl 10-ig az origón, 10 -tl százig a [0 , 20] as ponton áthaladva, 100 felett pedig a [10 , 10] es pontra illeszkedve, amivel nem éri a + ∞ben felvett z_{∞} értékét.

Ezen egyenesek egyenleteit is megadhatjuk egy táblázatban illetve ezek kiszámításának módját a Maple szimbolikus lehetségének használatával.

Ezen animációkat egymás után is fzhetjük: (az insequence=true utasítással)

plots[*display*]([*tartanimparam1*, *tartanimparam12*, *tartanimparam2*, *tartanimparam3*], *view* = [$-10..30, -10..30$], *insequence* = *true*);

$t = -302.$



Mj: Mindez - természetesen - csak akkor megy, ha az összes animációt már legeneráltuk, enterrel lefuttattuk.

Összefoglalva:

A célfüggvényben parametrikus lineáris programozási normál feladatok megoldása a célfüggvény együtthatóinak vizsgálatával kezddik. Amennyiben van olyan tartomány ahol minden célfüggvény együttható egyszerre negatív értéket vesz fel, - esetünkben volt ilyen méghozzá egy felülről nyitott pozitív végtelenbe nyúló tartomány – akkor ezen tartományban a <u>x</u> = 0 , z = 0 az optimális megoldás.
A továbblépés technikája: báziscsere végrehajtásával kilépünk ezen tartományból (a tartomány szélét adó célfüggvény együttható felett választva báziscsere elemet) a következ táblában ismételten megvizsgálva, hogy itt is lehetséges-e, hogy minden célfüggvény együttható egyszerre negatív. Ebbl kapjuk a következ karakterisztikus intervallumot. (Mely az elzhöz csatlakozó tartomány.) Itt újabb – nullától különböző - z(t)függvény írja le a célfüggvény paramétertől való függését, és más – nullától különböző – <u>x</u> megoldás válik optimálissá. (Amit a táblából leolvashatunk.)
Eredményeink - klasszikus stílusú - összefoglalása a célfüggvény paramétertl való függésének z = z (t) ábrázolása [t , z(t)] kétdimenziós grafikonon. Ezen feliratként a különböz z (t) -k és - az adott tartományban az optimalitást jelent - <u>x</u> $_{opt}$ - ok megjelenítése.

Új típusú vizualizáció pedig a megengedhet megoldások tartományán (mely teljesen hasonlóan ábrázolható, mint a "sima" LP feladatoknál) a célfüggvény ábrázolása a "t" paraméter függvényében dinamikusan, animáltan. Ekkor a célfüggvény minden karakterisztikus intervallumban illeszkedik az azott intervallumban optimális $\underline{x}_{opt}$ pontra, a karakterisztikus pontokban mindkét $\underline{x}_{opt}$-ra, mivel ekkor éppen érinti a megengedhet megoldások tartományát a célfüggvény egyenese.
A karakterisztikus pontokban alternatív optimum van, amely ezen a reprezentáción karakteresen meg is jelenik.

Elméleti rész, Kidolgozott példa feladatok :

Példafeladat 2. (3 dimenziós normál feladat vizualizációval, els tábla sosem optimális)

Adjuk meg az alábbi háromváltozós feladatot input ablakban is a további számítások eljárás hívásokkal történ megoldása céljából:

x1 + x2 + x3 ≤ 10
2*x1 + 5 *x2 - x3 ≤ 12
3*x1 + x2 + 3*x3 ≤ 12
x1 - 2* x2 + 4*x3 ≤ 24

z = (2 - t) *x1 + (-1 + t) *x2 + (6+t)*x3 =max.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 10,$$
$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 \le 12,$$
$$3 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \le 12,$$
$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \le 24$$

$$(2 - t) x_1 + (-1 + t) \cdot x_2 + (6 + t) \cdot x_3$$

```
unassign('t') :
paramInput2( ) :
induloTabla( );
resultInitialization( );
```

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ u_2 & 2 & 5 & -1 & 12 \\ u_3 & 3 & 1 & 3 & 12 \\ u_4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -z & 2-t & -1+t & 6+t & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \qquad \textbf{(1.3.1.1)}$$

Vizsgáljuk máris az induló tábla mikor lehet optimális:

optTartNormal( );

$$[\textit{No common range, Never optimal}] \qquad \textbf{(1.3.1.2)}$$

Sosem mivel az egyenltlenségeknek nincs közös része!
Hogyan lépjünk tovább akkor...?
Ez esetben bármely együttható felett választhatunk báziscsere elemet, választásunk csak a tartomány lefedésének sorrendiségét befolyásolja, az eredményt nem.
Válasszunk elször a harmadik célfüggvény együttható felett.

bazisChangeV(u_3, x_3);

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & u_3 & b \\ u_1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 6 \\ u_2 & 3 & \frac{16}{3} & \frac{1}{3} & 16 \\ x_3 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 4 \\ u_4 & -3 & -\frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 8 \\ -z & -4-2t & -3+\frac{2}{3}t & -2-\frac{1}{3}t & -24-4t \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.1.3)}$$

Ennek optimalitási tartománya már nem látható olyan könnyen - de eljárásunkkal számítható:
optTartNormal( );

$$\left[-2, \frac{9}{2}\right] \qquad \textbf{(1.3.1.4)}$$

Ebben a tartományban az optimális megoldás: (most már egy eljárás meghívásával "olvassuk le".)

unassign('*t*') :
eredmMentKiir( );

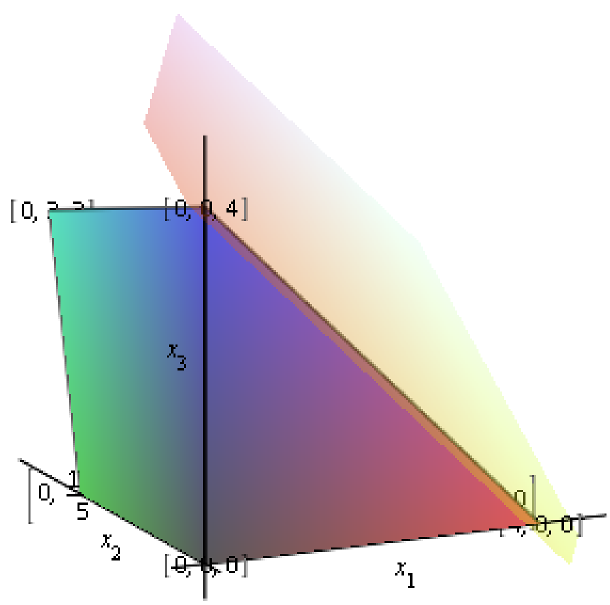
$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -2, \frac{9}{2}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, \text{"celfugveny : "}, 24 + 4\,t\right] \qquad \textbf{(1.3.1.5)}$$

Az optimális megoldás a [-2 , 9/2] intervallumban:
$\underline{x}^T$= [0 , 0 , 4] és z (t) = 24 + 4 t

A megengedhet megoldások tartományának - háromdimenziós - ábrázolása a célfüggvény síkokkal, a karakterisztikus intervallum két határpontjában:

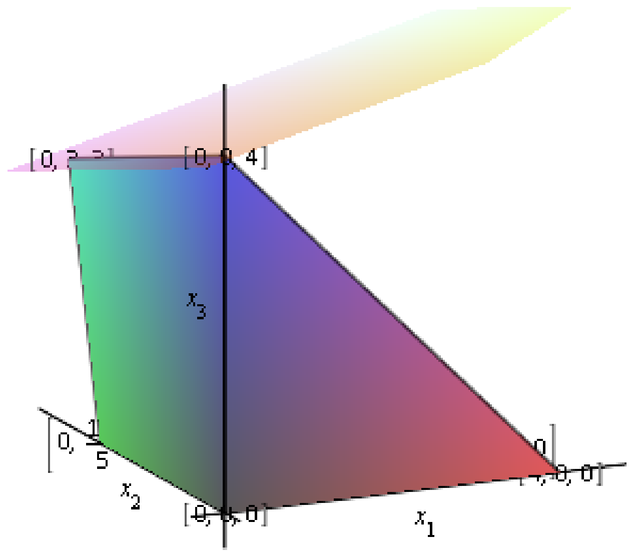
t = -2 -nél:

$t := -2 : abra3d(\ );$



t = 9/2 -nél:

$t := \frac{9}{2} : abra3d(\ );$

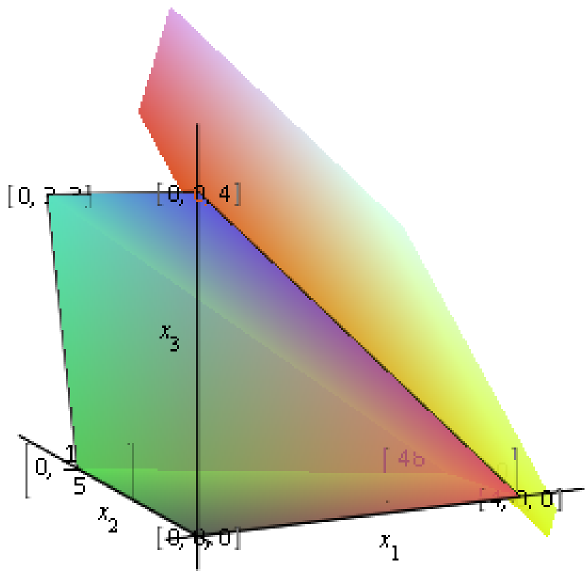


A Maple lehetséget nyújt a két pont közti - "t" paraméter mint függ változó - animáció megjelenítésére is:

$$An1 := CharrangeAnim\left(-2, \frac{9}{2}\right):$$

$$CharrangeAnim\left(-2, \frac{9}{2}\right);$$

$t = -2.$



A következ báziscserét a karakterisztikus intervallum alsó határát jelent t=-2 -es pontot adó els célfüggvény együttható felett végezzük.

$bazisChangeV\left(x_3, x_1\right);$

$$\begin{bmatrix} 2 & x_3 & x_2 & u_3 & b \\ u_1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 6 \\ u_2 & -3 & \frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & 4 \\ x_1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 4 \\ u_4 & 3 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 20 \\ -z & 4+2\,t & -\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\,t & -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,t & -8+4\,t \end{bmatrix} \tag{1.3.1.6}$$

Ennek a táblának az optimalitás vizsgálata:

optTartNormal( );

$$[-\infty, -2] \tag{1.3.1.7}$$

Vagyis mínusz végtelentl le tudtuk fedni a tartományt,$[-\infty, -2]$ ahol a megoldás:

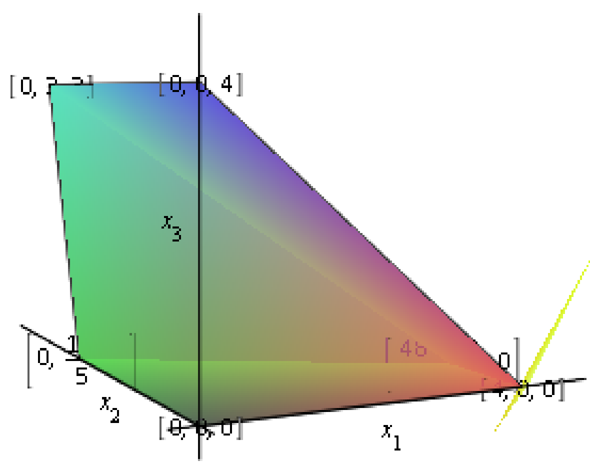
eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, -2, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, \text{"celfugveny : "}, 8 - 4\,t\right] \tag{1.3.1.8}$$

Az animáció a [-∞ ,-2] tartományban:
Mj: Ha -végtelennek nagyon nagy számot adunk meg, akkor a nyomok közül egy kivételével a többi "vonal" (vagyis sík) vastagságon belül esik. Ezért adunk meg kis kezd értéket az animációnak.

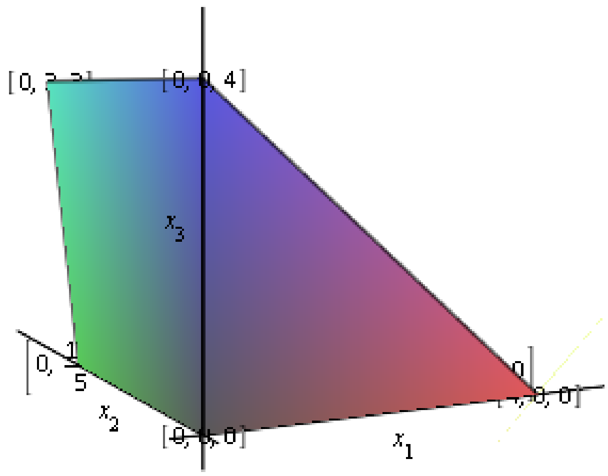
An2 := *CharrangeAnim*(-20,-2) :
CharrangeAnim(-20,-2);

$t = -20.$



Külön ábrázolva a t = - ∞ síkot.
Mj: A végtelennél ilyenkor sajnos nem alkalmazható a szimbolikus (∞) megadás, ezért egy elegenden nagy számot használunk.

$t := -2000000000 : abra3d(\ );$



Mj: Megeshet, hogy a sík csak az ábra nézpontjának változtatásával látható jobban. Ez az egérrel történ mozgatással, forgatással lehetséges.

Most azonban vissza kell lépnünk az elz tartományba, mivel onnan tudunk továbblépni annak fels határa a t=2/9 felé történ kilépéssel. Ehhez elször "visszakell cserélnünk" az x_3, x_1 változókat. (Így kapjuk vissza a 1. táblát, ugyan 3. sorszámmal - a bal fels sarokban.)

$unassign('t') :$
$bazisChangeV\left(x_1, x_3\right);$

$$\begin{bmatrix} 3 & x_1 & x_2 & u_3 & b \\ u_1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 6 \\ u_2 & 3 & \frac{16}{3} & \frac{1}{3} & 16 \\ x_3 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 4 \\ u_4 & -3 & -\frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 8 \\ -z & -4-2t & -3+\frac{2}{3}t & -2-\frac{1}{3}t & -24-4t \end{bmatrix} \quad (1.3.1.9)$$

Most tudunk a t=2/9-edet adó második célfüggvény együttható felett báziscsere elemet választani és az u2, x2 cserét végrehajtani.

$bazisChangeV(u_2, x_2);$

$$\begin{bmatrix} 4 & x_1 & u_2 & u_3 & b \\ u_1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 4 \\ x_2 & \frac{9}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 3 \\ x_3 & \frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & 3 \\ u_4 & -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{9}{8} & 18 \\ -z & -\frac{37}{16}-\frac{19}{8}t & \frac{9}{16}-\frac{1}{8}t & -\frac{29}{16}-\frac{3}{8}t & -15-6t \end{bmatrix} \quad (1.3.1.10)$$

Ennek optimalitás vizsgálata:

$optTartNormal(\ );$

$$\left[\frac{9}{2}, \infty\right] \quad (1.3.1.11)$$

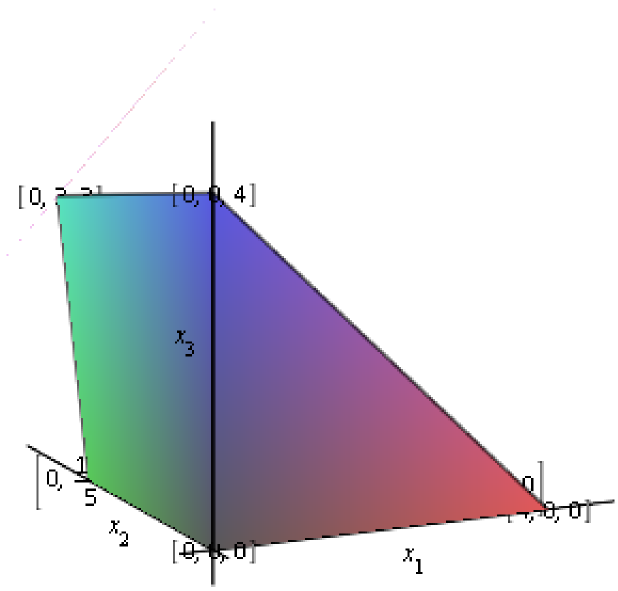
Sikerült - egy lépésben - lefedni a teljes plusz végtelenig men tartományt.
Itt a megoldás:

$eredmMentKiir(\ );$

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, \frac{9}{2}, \infty, \text{" x Optimális : "}, x_1=0, x_2=3, x_3=3, \text{"celfugveny : "}, 15+6t\right] \quad (1.3.1.12)$$

A célfüggvény megjelenítése a t = +∞ pontban:

$t := 20000000000000 : abra3d(\ );$

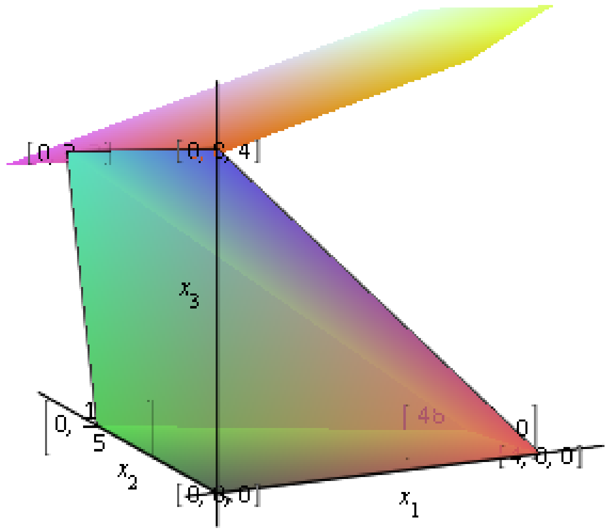


Az animáció pedig:

$An3 := CharrangeAnim\left(\frac{9}{2}, 20\right):$

$CharrangeAnim\left(\frac{9}{2}, 20\right);$

$t = 4.5000$



Az eredmény klasszikus reprezentációjának elkészítéséhez a leghatékonyabb technika ha idemásoljuk a részeredményeket és az alapján töltjük ki a táblázatot majd készítjük el a grafikont.

$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, -2, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, \text{"celfugveny : "}, 8 - 4\,t\right]$

$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -2, \frac{9}{2}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, \text{"celfugveny : "}, 24 + 4\,t\right]$

$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, \frac{9}{2}, \infty, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 3, \text{"celfugveny : "}, 15 + 6\,t\right]$

Ugyanezt teszi meg az *osszeredmKiir*( ); eljárás is (ugyan nem olyan szép külalakkal) de azzal a többlettel, hogy a változóknak is értéket ad, és a z(t) függvény felrajzolását is lehetvé teszi.

osszeredmKiir( );

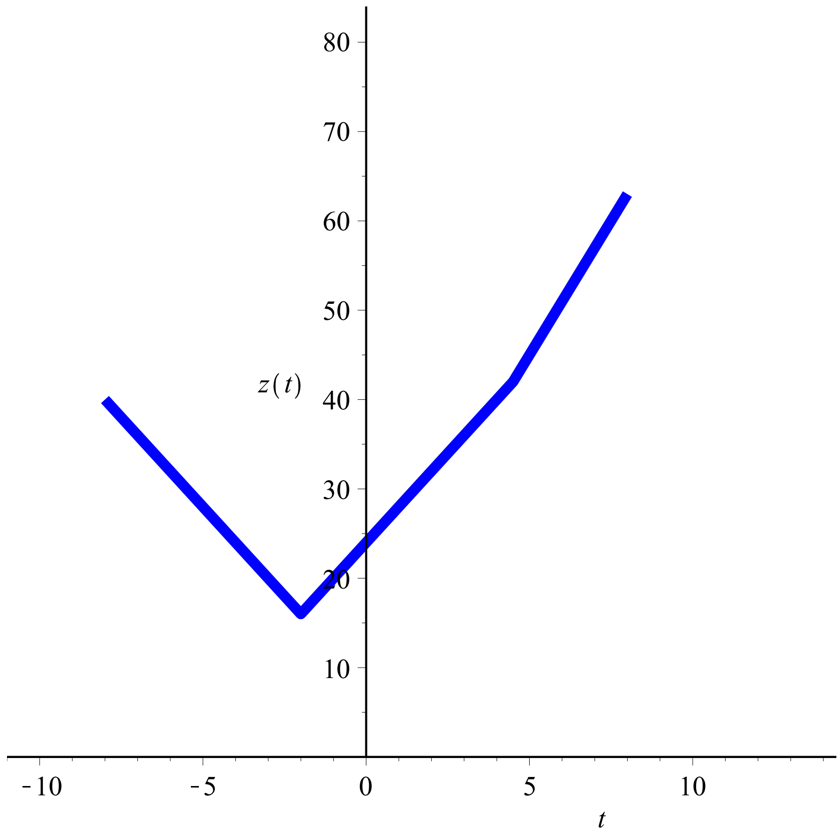
$$\left[\left[\left[\{\ \}, \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, \frac{9}{2}, \infty, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 3, \text{"celfugveny : "}, 15 + 6\,t, \text{"   "}\right], \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, -2, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, \text{"celfugveny : "}, 8 - 4\,t, \text{"   "}\right], \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -2, \frac{9}{2}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, \text{"celfugveny : "}, 24 + 4\,t, \text{"   "}\right] \quad \textbf{(1.3.1.13)}$$

Karakterisztikus intervallum :	z (t)	<u>x</u> *optimális*
$-\infty \leq t \leq -2$	$8-4\,t$	[4 , 0 , 0]
$-2 \leq t \leq \frac{9}{2}$	$24 + 4\,t$	[0 , 0 , 4]
$4.5 \leq t \leq \infty$	$15 + 6\,t$	[0 , 3 , 3]

Grafikonon:
Ennek Maple programja:

```
unassign('t') :
T1 := piecewise( (hatar[1, 1] < t and t < hatar[1, 2]), celfvtartomanyban[1], hatar[2, 1]
    < t and t < hatar[2, 2], celfvtartomanyban[2], hatar[3, 1] < t and t < hatar[3, 2],
    celfvtartomanyban[3]);
tmin := -10 : tmax := 12 : ztmin := 0 : ztmax := 70 :
plot(T1, t=-8..8, view= [1.1 * tmin..1.2 * tmax, 1.1 * ztmin..1.2 * ztmax], thickness= 5,
    colour = "Blue", labels = [t, z(t) ], numpoints = 1000)
```

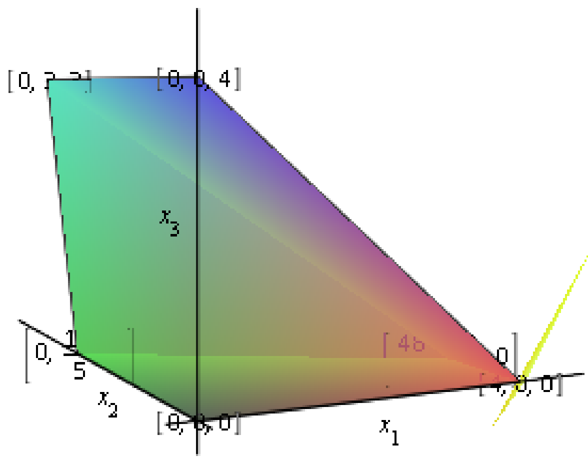
$$\begin{cases} 24 + 4\,t & -2 < t \textbf{ and } t < \frac{9}{2} \\ 8 - 4\,t & -\infty < t \textbf{ and } t < -2 \\ 15 + 6\,t & \frac{9}{2} < t \textbf{ and } t < \infty \end{cases}$$



Új típusú animált megjelenítés pedig a teljes paraméter tartományra:

$Seqanim(\ );$

$t = -20.$



Összefoglalva:

Ezen feladat - az elzekhez képest új - tanulságai:
Célfüggvényben parametrikus lineáris programozási normál feladatok megoldáskor elfordulhat, hogy az els tábla sosem optimális.
Ekkor az els báziscsere elem választásunk csak a tartomány lefedésének kezd intervallumát határozza meg. A második - már valamely tartományban optimális - tábla optimalitási tartománya ha véges, akkor egyik széls karakterisztikus pontját adó célfüggvény felett választva pivot elemet lefedhetjük (esetünkben egy, általános esetben több lépésben - az induló tartomány alatti részt. Majd visszatérve az els optimális tartománnyal rendelkez táblához annak fels karakterisztikus pontját adó célfüggvényegyüttható felett (megengedhet) báziscserét végrehajtva fedhetjük le a fels tartományokat.
Mj: Természetesen kezdhetjük a feledést a fels karakterisztikus ponttal is.
Eredményeink klasszikus [t , z(t)] vizualizációja független a dimenziótól. Ezen grafikonon bármilyen dimenziós x értékek megjeleníthetek. (Csak nem a Maple segítségével sajnos.)
Az els tábla sosem optimális esetben nincs olyan tartomány ahol a z = 0 , x = 0 lenne a megoldás, vagyis ekkor sosem legjobb megoldás a "nem termelünk semmit "!

Új típusú vizualizációnk - a megengedhet megoldások tartománya és e felett a célfüggvények síkjai - három dimenzióban látványos, eljárásunk más, input ablakban a beolvasó eljárás segítségével megadott feladatra is alkalmazható. Képes a tartományt megjeleníteni elre megadott "t" paraméter értékhez tartozó célfüggvény síkkal együtt, valamint animációt készíteni adott t tartományra.
Vigyázat! Karakterisztikus intervallumokon átível animáció nem készíthet, mert azokban az optimális pont különböz!
(Vagyis minden animáció csak karakterisztikus ponttól karakterisztikus pontig tarthat. A Maple elkészti a hibás animációt is de annak nincs valós jelentése.)

Példafeladat 3. (Módosított normál feladat)

Adjuk meg az alábbi parametrikus programozási feladat optimális megoldását a paraméter függvényében a t∈[-100, 100] –as tartományban.
Ha x1 , x2 >= 0

2 x1 + x2 + 2 x3 = 30
3 x1 + 4 x2 ≤ 15
4 x1 - 3 x3 45
3 x2 + x3 ≤ 60

z = (t-8) x1 + (6-t) x2 + (2+t) x3= max.

A feladatot ismételten duplán adjuk meg. Egyrészt a szöveges részben, másrészt - az eljárások használhatósága, és az esetleges olvasói módosítást lehetsége miatt - módosítható inputként is. (MathContainer)

$$2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 = 30,$$
$$3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 15,$$
$$4\cdot x_1 - 3\cdot x_3 \le 45,$$
$$3\cdot x_2 + x_3 \le 60$$

$$(t-8)\cdot x_1 + (6-t)\cdot x_2 + (2+t)\cdot x_3$$

Beolvasva az input tartományt, és elkészítve az induló táblát:
paramInput3mod( ) :

induloTabla( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ um_1 & 2 & 1 & 2 & 30 \\ u_2 & 3 & 4 & 0 & 15 \\ u_3 & 4 & 0 & -3 & 45 \\ u_4 & 0 & 3 & 1 & 60 \\ -z & t-8 & 6-t & 2+t & 0 \\ zm & 2 & 1 & 2 & 30 \end{bmatrix} \qquad (1.3.2.1)$$

Módosított normál feladat lévén elször az egyenlséget jelent sort kell "felvinnünk" vagyis kielégítenünk, rá lépnünk az ezt a feltételt jelent síkra.
Ehhez például az u1, x1 báziscserét kell végrehajtanunk. (Lehetne mást is de ezt választottuk.)

bazisChangeV$\left(um_1, x_3\right)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & um_1 & b \\ x_3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ u_2 & 3 & 4 & 0 & 15 \\ u_3 & 7 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 90 \\ u_4 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 45 \\ -z & -10 & 5-\frac{3}{2}t & -1-\frac{1}{2}t & -30-15t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.3.2.2)$$

Az optimalitási tartományt vizsgálva a az egyenlséges feltétel oszlopát - a sima LP feladatban is - törölni szoktuk, vagyis azt nem kell vizsgálnunk. A módosított normál feladatra vonatkozó optTartModNormal eljárást kell hívnunk:

optTartModNormal( );

$$\left[\frac{10}{3}, \infty\right] \qquad (1.3.2.3)$$

Plusz végtelenig terjed tartományt kaptunk ahol a megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, \frac{10}{3}, \infty, \text{" x Optimális : "}, x_1=0, x_2=0, x_3=15, \right. \qquad (1.3.2.4)$$

"celfugveny : ", $30 + 15\,t$]

A karakterisztikus intervallum határát a második célfüggvényegyüttható adta, ezért e felett kell báziscsere elemet választani.

bazisChangeV(u_2, x_2);

$$\begin{bmatrix} 2 & x_1 & u_2 & um_1 & b \\ x_3 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{105}{8} \\ x_2 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{15}{4} \\ u_3 & \frac{47}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2} & \frac{675}{8} \\ u_4 & -\frac{23}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{285}{8} \\ -z & -\frac{55}{4} + \frac{9}{8}\,t & -\frac{5}{4} + \frac{3}{8}\,t & -1 - \frac{1}{2}\,t & -\frac{195}{4} - \frac{75}{8}\,t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.2.5)}$$

Ismételten az optimalitási tartományt vizsgálva:

optTartModNormal( );

$$\left[-\infty, \frac{10}{3}\right] \quad \textbf{(1.3.2.6)}$$

Máris iskerült lefednünk teljes mínusz végtelentlvégtelenig terjed tartományt!
Mínusz végtelentl 13-ig az optimális ez a tábla.
Ekkor a megoldás:
x = [0 , 15 , 15/2] , z = 105- 15/2 t

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, \frac{10}{3}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = \frac{15}{4}, x_3 = \frac{105}{8}, \text{"celfugveny : "}, \frac{195}{4} + \frac{75}{8}\,t\right] \quad \textbf{(1.3.2.7)}$$

A teljes megoldás:

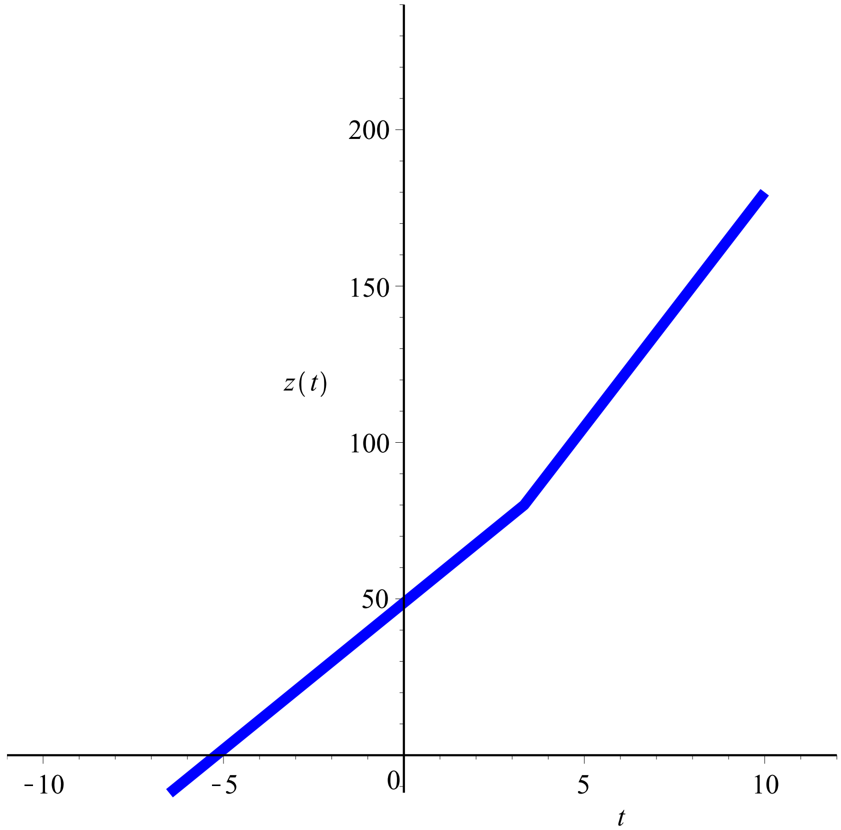
osszeredmKiir( );

$$\left[\left[\{\ \}, \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, \frac{10}{3}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = \frac{15}{4}, x_3 = \frac{105}{8}, \text{"celfugveny : "}, \frac{195}{4} + \frac{75}{8}\,t, \text{" "}\right], \right. \quad \textbf{(1.3.2.8)}$$

$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, \frac{10}{3}, \infty, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3$$

$= 15$, "celfugveny : ", $30 + 15\,t$, "   "

osszcelfvRajzol3(−200, 200);



Összefoglalva:

Módosított normál klasszikus parametrikus feladat esetén az indulótáblában az egyenlséges sorokat um_i - el kell jelölnünk - a Maple eljárás alkalmazhatósága miatt - ahol az i index (kézi számolásunkban megszokott módon) az egyenlséges sor sorszámát jelentheti.
A kétfázisú Szimplex alkalmazva elször az egyenlséges soroknak megfelel feltételekre kell rálépni, (más szóval kielégíteni, vagyis "felvinni"). Ezen oszlopokat ugye a kézi számításban töröltük is, itt csak annyit kell tenni, hogy az alattuk lév kifejezések kivételével kell a közös tartományt meghatározni, ezt pedig az eljárás teszi. (Ezért szükséges, hogy um_i - vel történjen a jelölés!)
A kétfázisú módszer els fázásának befejezésekor a normál feladatnál megismertek a mérvadóak.
Mj: Módosított normál feladatnál ha már az "elstábla" is optimális, akkor sem a z=0 x=0 a megoldás, mivel már zajlott báziscsere.

Példafeladat 4. (Általános típusú feladat)

Adjuk meg az alábbi általános típusú parametrikus lineáris programozási feladat optimális megoldását a paraméter függvényében a t∈[- , ∞] tartományában,
ha x1 , x2 >= 0

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\le 9\\
x2 &\le 5\\
x1 &\le 6\\
- x1 + x2 &\le 2\\
x1 - 2\, x2 &\le 4\\
x1 + x2 &\ge 1
\end{aligned}
$$

----

z = (2 + 3 t) x1 + (t-4) x2 = max.

A feladatot itt is duplán adjuk meg, de az input ablakokban (MathContainerConstr4, MathContainerGoal4) már módosított normál feladatra visszavezetett alakban, mivel csak arra alkalmazható a Szimplex módszer.
Mj: Eljárásunk alkalmazhatósága miatt az egyenlséges sornak um_i - nevet kell adnuk, ahol az i index a sor sorszámát jelenti.

$x_1 + x_2 \le 9,$
$x_2 \le 5,$
$x_1 \le 6,$
$-x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 - 2\cdot\ x_2 \le 4,$
$x_1 + x_2 - v_6 = 1$

$(2 + 3\cdot t)\cdot x_1 + (t - 4\ )\cdot x_2$

Beolvasva az input tartományt, és elkészítve az induló táblát:

paramInput4mod( ) :
induloTabla( );

$$\begin{bmatrix} 0 & v_6 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ u_4 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ u_5 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ um_6 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & 0 & 2+3\,t & t-4 & 0 \\ zm & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.3.1)$$

Az egyenlséges sor kielégítésével kell kezdenünk a számítást, az um_6 sor és x_1 oszlop cseréjével.

bazisChangeV(um_6, x_1);

$$\begin{bmatrix} 1 & v_6 & um_6 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & -1 & 0 & 8 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ u_3 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ u_4 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ u_5 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ x_1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & 2+3\,t & -2-3\,t & -2\,t-6 & -2-3\,t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.3.2)$$

Ezen tábla optimalitását már vizsgálhatjuk, mert máris eljutottunk a kétfázisú Szimplex módszer els fázisának végére.

optTartModNormal( );

$$\left[-3, -\frac{2}{3}\right] \quad (1.3.3.3)$$

Ebben a tartományban a megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -3, -\frac{2}{3}, \text{" x Optimális : "}, v_6 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, \text{"celfugveny : "}, 2+3\,t\right] \quad (1.3.3.4)$$

A tartomány bal (-3 - as) határát a második célfüggvény együttható adta c_2 (t) mely - ugyan nem a második oszlopban szerepel, mivel a Maple a betrend miatt a "v" segédváltozót teszi elre. (Az x_2 változó alatti célfüggvény együttható c_2 (t) .) Ebben az oszlopban a legszkebb keresztmetszet követelménynek megfelel báziscserét az x_1, x_2 csere jelenti.

bazisChangeV(x_1, x_2);

$$\begin{bmatrix} 2 & v_6 & um_6 & x_1 & b \\ u_1 & 1 & -1 & 0 & 8 \\ u_2 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ u_3 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ u_4 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ u_5 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & t-4 & 4-t & 6+2t & 4-t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.3.5)$$

Vizsgáljuk ezen tábla optimalitását:

optTartModNormal( );

$$[-\infty, -3] \quad (1.3.3.6)$$

Ebben a tartományban az optimális megoldás:

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", $-\infty$, -3, " x Optimális : ", $v_6 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, "celfugveny : ", $t - 4$] **(1.3.3.7)**

Ezzel a bal oldali részt teljesen le is fedtük. Lépjünk vissza a véges karakterisztikus intervallumot adó tábláig, melyet az eddig elvégzett cserék (szerencsére csak egy) "visszacserélésével" kaphatunk vissza.

bazisChangeV(x_2, x_1);

$$\begin{bmatrix} 3 & v_6 & um_6 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & -1 & 0 & 8 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ u_3 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ u_4 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ u_5 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ x_1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & 2+3t & -2-3t & -2t-6 & -2-3t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.3.8)}$$

Ebbl a táblából most a másik irányba kell kilépnünk, mely az u_5, v_6 cserével valósul meg. (Az um_6 oszlopbeli (-2-3t) együttható ugye nem vesz részt a vizsgálatban.)

$bazisChangeV(u_5, v_6)$;

$$\begin{bmatrix} 4 & u_5 & um_6 & x_2 & b \\ u_1 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ u_3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ u_4 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ v_6 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ x_1 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ -z & -2-3t & 0 & 7t & -8-12t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.3.9)}$$

Vizsgálva ezen tábla optimalitását:

$optTartModNormal(\ )$;

$$\left[-\frac{2}{3}, 0\right] \qquad \textbf{(1.3.3.10)}$$

Ebben a tartományban a megoldás:

$eredmMentKiir(\ )$;

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\frac{2}{3}, 0, \text{" x Optimális : "}, v_6=3, x_1=4, x_2=0, \text{"celfugveny : "}, 8+12t\right] \qquad \textbf{(1.3.3.11)}$$

Innen a (7t) oszlopában lév u3 sorában álló 2-essel mint pivot elemmel léphetünk tovább az u_3, x_2 cserével.

bazisChangeV(u_3, x_2);

$$\begin{bmatrix} 5 & u_5 & um_6 & u_3 & b \\ u_1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ u_2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ x_2 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ u_4 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 7 \\ v_6 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 6 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -z & -2+\frac{1}{2}t & 0 & -\frac{7}{2}t & -8-19t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.3.12)}$$

Vizsgálva ezen tábla optimalitását:

optTartModNormal( );

$$[0, 4] \quad \textbf{(1.3.3.13)}$$

Ebben az intervallumban a megoldás:

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", 0, 4, " x Optimális : ", $v_6 = 6$, $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, "celfugveny : ", $8 + 19\,t$] **(1.3.3.14)**

Innen a az u_2, u_5 cserével léphetünk tovább.

bazisChangeV(u_2, u_5);

$$\begin{bmatrix} 6 & u_2 & um_6 & u_3 & b \\ u_1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ u_5 & 2 & 0 & -1 & 8 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ u_4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ v_6 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -z & 4-t & 0 & -2-3t & 8-23t \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(1.3.3.15)}$$

Vizsgálva ezen tábla optimalitását:

optTartModNormal( );

$$[4, \infty] \qquad \mathbf{(1.3.3.16)}$$

Ebben az intervallumban a megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, 4, \infty, \text{" x Optimális : "}, v_6 = 10, x_1 = 6, x_2 = 5, \text{"celfugveny : "}, -8 + 23\,t\right] \qquad \mathbf{(1.3.3.17)}$$

Ezen táblával elérkeztünk a jobboldali tartomány széléhez. (Végre.)
Eredményeinket Maple segédeljárásunkkal megjelenítve:

osszeredmKiir( );

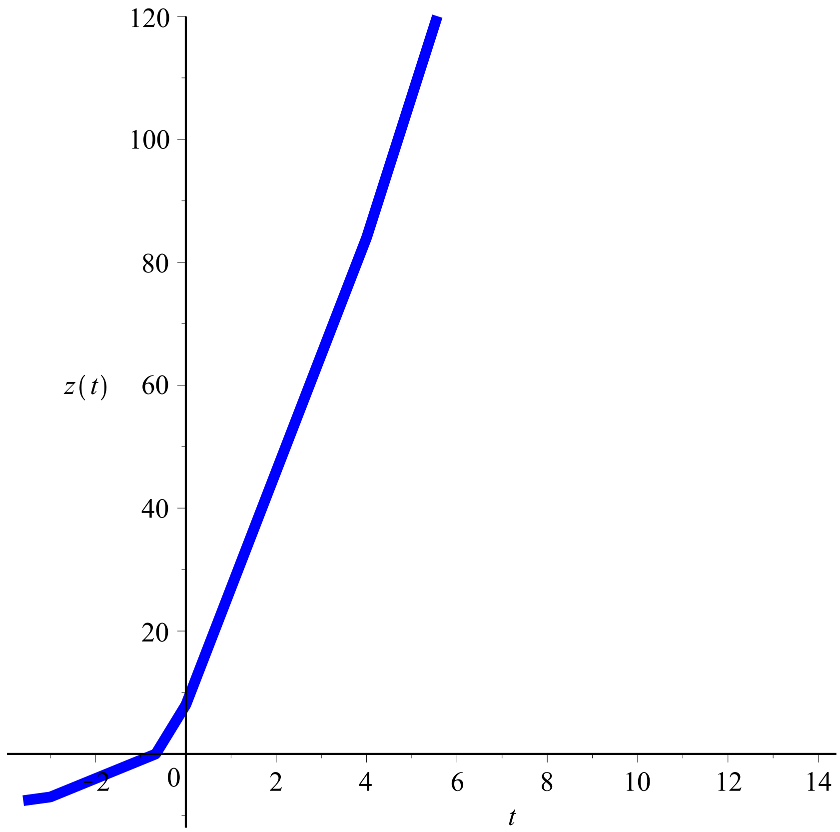
$$\Big[\Big[\Big[\big[\big[\{\,\}, \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, 4, \infty, \text{" x Optimális : "}, v_6 = 10, x_1 = 6, x_2 = 5, \text{"celfugveny : "}, -8 + 23\,t, \text{"   "}\big], \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, 0, 4, \text{" x Optimális : "}, v_6 = 6, x_1 = 6, x_2 = 1, \text{"celfugveny : "}, 8 + 19\,t, \text{"   "}\big], \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\frac{2}{3}, 0, \text{" x Optimális : "}, v_6 = 3, x_1 = 4, x_2 = 0, \text{"celfugveny : "}, 8 + 12\,t, \text{"   "}\Big], \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, -3, \text{" x Optimális : "}, v_6 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, \text{"celfugveny : "}, t - 4, \text{"   "}\Big], \qquad \mathbf{(1.3.3.18)}$$

"Karakterisztikus intervallum : ", -3, $-\frac{2}{3}$, " x Optimális : ", $v_6 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, "celfugveny : ", $2 + 3\,t$, "   "

Táblázatban összefoglalva:

Karakterisztikus intervallumok : $a \le t \le b$	$z(t)$	$\underline{x}_{optimal}$, v_6
$-\infty < t < -3$	$t - 4$	[0 , 1] $v_6 = 0$
$-3 < t < -\frac{2}{3}$	$2 + 3 \cdot t$	[1 , 0] $v_6 = 0$
$-\frac{2}{3} < t < 0$	$8 + 12 \cdot t$	[4 , 0] $v_6 = 0$
$0 < t < 4\infty$	$8 + 19 \cdot t$	[6 , 1] $v_6 = 6$
$4 < t < \infty$	$8 + 23 \cdot t$	[6 , 5] $v_6 = 10$

$osszcelfvRajzol(-10, +100)$;



Összefoglalva:

Általános típusú klasszikus parametrikus feladat esetén az indulótáblát módosított normál feladatra visszavezetett formában kell eljárásuknak megadni.
Ez után a módosított normál feladatnál írottak az érvényesek a feladat megoldásra.

További kidolgozott feladatok

Az alábbiakban - nem annyira egyszerű számítással rendelkező, mint az elméleti részben – minden az oktatásban, számonkérésben elfordulható típusra mutatunk be mintapéldát, és ezek matematikai, technikai - nem gazdasági, modellezési - tanulságait foglaljuk össze,

Példafeladat 5. (Els tábla konstans célfügvényegyüttható okán sosem optimális)

Parametrikus lineáris programozás normál feladat
"Egyoldalas", els tábla nem optimális típusú

x1 , x2 , x3 , x4 $\geq$ 0

x1 + 2 x2 - 2 x4 $\leq$ 24
-x1 + 6 x3 + 4 x4 $\leq$ 44
□ + 2 x2 - x3 + 2 x4 12

z = (2+ 3t) x1 + (5+1t) x2 + 4 x3 + (4+t) x4 = max.

$x_1 + x_2 - 2\cdot x_4 \leq 24,$
$-x_1 + 6\cdot x_3 + 4\cdot x_4 \leq 44,$
$2\cdot x_2 - x_3 + 2\cdot x_4 \leq 12$

$(2 + 3\cdot t)x_1 + (5 + t)\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + (4 + t)\cdot x_4$

unassign('*t*') :
paramInput5( ) :
induloTabla( );

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 24 \\ u_2 & -1 & 0 & 6 & 4 & 44 \\ u_3 & 0 & 2 & -1 & 2 & 12 \\ -z & 2+3t & 5+t & 4 & 4+t & 0 \end{array}\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.1)}$$

Vizsgáljuk meg ez tábla mikor optimális:

optTartNormal( );

[*No common range, Never optimal*] **(1.3.4.1.2)**

Az induló tábla nem optimális, mert van (t-tl nem is függ) konstans pozitív célfüggvény együttható.
Ezért e felett kell báziscserét végrehajtani, az u_2 , x_3 cserével.

bazisChangeV(u_2, x_3);

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & u_2 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 24 \\ x_3 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{22}{3} \\ u_3 & -\frac{1}{6} & 2 & \frac{1}{6} & \frac{8}{3} & \frac{58}{3} \\ -z & \frac{8}{3}+3t & 5+t & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}+t & -\frac{88}{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4.1.3)}$$

Most már nincs pozitív (csak negatív) konstans a célfüggvény sorában. Megvizsgálva ezen tábla optimalitási tartományát:

optTartNormal( );

$$[-\infty, -5] \quad \textbf{(1.3.4.1.4)}$$

Balról nyílt tartományt kapunk ahol az optimális megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : ", } -\infty, -5, \text{" x Optimális : ", } x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{22}{3}, x_4 = 0, \text{"celfugveny : ", } \frac{88}{3}\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.5)}$$

A karakterisztikus intervallum véges , jobb oldali határpontját az x2 együtthatója adta, ezért e felett kell báziscsere elemet választanunk:

bazisChangeV(u_3, x_2);

$$\left[\left[2, x_1, u_3, u_2, x_4, b\right], \left[u_1, \frac{13}{12}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, -\frac{10}{3}, \frac{43}{3}\right], \left[x_3, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{22}{3}\right], \left[x_2, -\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{4}{3}, \frac{29}{3}\right], \left[-z, \frac{37}{12} + \frac{37}{12}t, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{13}{12} - \frac{1}{12}t, -\frac{16}{3} - \frac{1}{3}t, -\frac{233}{3} - \frac{29}{3}t\right]\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.6)}$$

Ennek optimalitását vizsgálva:

optTartNormal( );

$$[-5, -1] \quad \textbf{(1.3.4.1.7)}$$

Ebben az intervallumban az optimális megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -5, -1, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = \frac{29}{3}, x_3 = \frac{22}{3}, x_4 = 0, \text{"celfugveny : "}, \frac{233}{3} + \frac{29}{3}\, t\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.8)}$$

A határt most az x_1 együtthatója szolgáltatta:

bazisChangeV(u_1, x_1);

$$\left[\left[3, u_1, u_3, u_2, x_4, b\right], \left[x_1, \frac{12}{13}, -\frac{6}{13}, -\frac{1}{13}, -\frac{40}{13}, \frac{172}{13}\right], \left[x_3, \frac{2}{13}, -\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{124}{13}\right], \left[x_2, \frac{1}{13}, \frac{6}{13}, \frac{1}{13}, \frac{14}{13}, \frac{140}{13}\right], \left[-z, -\frac{37}{13} - \frac{37}{13}\, t, -\frac{14}{13} + \frac{12}{13}\, t, -\frac{11}{13} + \frac{2}{13}\, t, \frac{54}{13} + \frac{119}{13}\, t, -\frac{1540}{13} - \frac{656}{13}\, t\right]\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.9)}$$

Ebben az intervallumban az optimális megoldás:

optTartNormal( );

$$\left[-1, -\frac{54}{119}\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.10)}$$

Ebben az intervallumban az optimális megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -1, -\frac{54}{119}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = \frac{172}{13}, x_2 = \frac{140}{13}, x_3 = \frac{124}{13}, x_4 = 0, \text{"celfugveny : "}, \frac{1540}{13} + \frac{656}{13}\, t\right] \quad \textbf{(1.3.4.1.11)}$$

A $-\frac{54}{119}$ -et szolgáltató x_4 együtthatója felett lépve tovább:

bazisChangeV(x_2, x_4);

$$\begin{bmatrix} 4 & u_1 & u_3 & u_2 & x_2 & b \\ x_1 & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{20}{7} & 44 \\ x_3 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 8 \\ x_4 & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{13}{14} & 10 \\ -z & -\frac{22}{7} - \frac{7}{2}\,t & -\frac{20}{7} - 3\,t & -\frac{8}{7} - \frac{1}{2}\,t & -\frac{27}{7} - \frac{17}{2}\,t & -160 - 142\,t \end{bmatrix} \tag{1.3.4.1.12}$$

optTartNormal( );

$$\left[-\frac{54}{119},\ \infty\right] \tag{1.3.4.1.13}$$

Ebben az intervallumban az optimális megoldás:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\frac{54}{119},\ \infty,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1 = 44,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8,\ x_4 = 10,\ \text{"celfugveny : "},\ 160 + 142\,t\right] \tag{1.3.4.1.14}$$

A megoldások a karakterisztikus intervallumokban:

osszeredmKiir( );

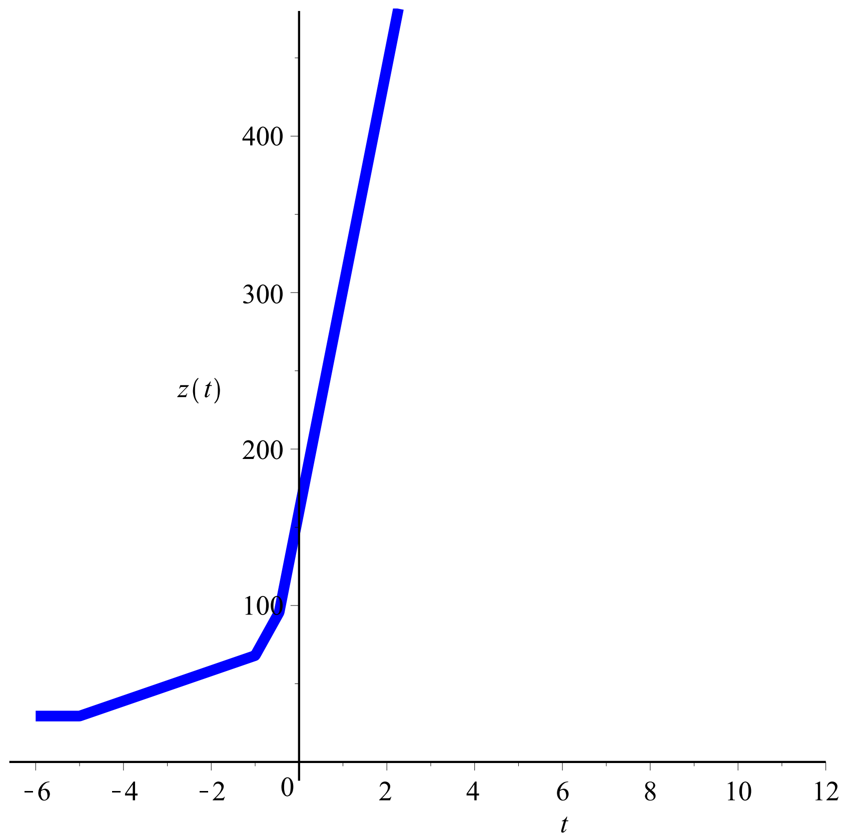
$$\left[\left[\left[\left[\{\ \},\ \text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\frac{54}{119},\ \infty,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1 = 44,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8,\ x_4 = 10,\ \text{"celfugveny : "},\ 160 + 142\,t,\ \text{"   "}\right],\right.\right.\right.$$
$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -1,\ -\frac{54}{119},\ \text{" x Optimális : "},\ x_1 = \frac{172}{13},\ x_2 = \frac{140}{13},\ x_3 = \frac{124}{13},\ x_4 = 0,\ \text{"celfugveny : "},\ \frac{1540}{13} + \frac{656}{13}\,t,$$
$$\left.\text{"   "}\right],\ \text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -5,\ -1,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{29}{3},\ x_3 = \frac{22}{3},\ x_4 = 0,\ \text{"celfugveny : "},\ \frac{233}{3} + \frac{29}{3}\,t,\ \text{"   "}\Big],$$
$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\infty,\ -5,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{22}{3},\ x_4 = 0,\ \text{"celfugveny : "},\ \frac{88}{3},\ \text{"   "}\Big] \tag{1.3.4.1.15}$$

A szokásos táblázatos megjelenítés:

Karakterisztikus intervallum :	z (t)	$\underline{x}$ *optimális*
$-\infty \le t \le -5$	$\frac{88}{3}$	$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{22}{3}, x_4 = 0$
$-5 \le t \le -1$	$\frac{233}{3} + \frac{29}{3}\,t,$	$x_1 = 0, x_2 = \frac{29}{3}, x_3 = \frac{22}{3}, x_4 = 0$
$-1 \le t \le -\frac{54}{119}$	$\frac{1540}{13} + \frac{656}{13}\,t$	$x_1 = \frac{172}{13}, x_2 = \frac{140}{13}, x_3 = \frac{124}{13}, x_4 = 0$
$-\frac{54}{119} \le t \le \infty$	$160 + 142\,t$	$x_1 = 44, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 10$

A célfüggvény grafikonja a paraméter függvényében:

osszcelfvRajzol(−10, 240);



Példafeladat 6. (Több karakterisztikus intervallummal rendelkez négy dimenziós "egyoldalas"normál feladat)

Parametrikus normál lineáris programozási feladat
"Egyoldalas", els tábla is optimális típusú

x1 , x2 , x3 , x4 >= 0

x1 + x2 - 2 x4 ≤ 24
-x1 + 6 x3 + 4 x4 ≤ 44
2 x2 - x3 + 2 x4 12

z = (2+ 3t) x1 + (5+1t) x2 + (-3+4t) x3 + (4+t) x4 = max.

$x_1 + x_2 - 2 \cdot \; x_4 \leq 24,$
$- \; x_1 + 6 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 44,$
$2 \cdot x_2 - \; x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 12$

$(2 + 3 \cdot \; t) x_1 + (5 + t) \cdot x_2 + (-3 + 4 \cdot \; t) \cdot x_3 + (4 + t) \cdot x_4$

unassign('*t*') :
paramInput6( ) :
induloTabla( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 24 \\ u_2 & -1 & 0 & 6 & 4 & 44 \\ u_3 & 0 & 2 & -1 & 2 & 12 \\ -z & 2+3t & 5+t & -3+4t & 4+t & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4.2.1)}$$

Ismételten Maple eljárás segítségével meghatározva az els Simplex tábla optimalitási tartományát :
optTartNormal( );

$$[-\infty, -5] \quad \textbf{(1.3.4.2.2)}$$

$t \leq -5$ -t kapjuk.
Ezen tartományban az optimális megoldás:
z=0 és x=0.

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", $-\infty$, -5, " x Optimális : ", $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, "celfugveny : ", 0] **(1.3.4.2.3)**

A (5+t) együttható felett választva pivot elemet és az x_2 , u_3 báziscserét végrehajtva

bazisChangeV(u_3, x_2);

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_3 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 & 18 \\ u_2 & -1 & 0 & 6 & 4 & 44 \\ x_2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 6 \\ -z & 2+3\,t & -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\,t & -\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\,t & -1 & -30-6\,t \end{bmatrix} \tag{1.3.4.2.4}$$

Az optimalitási tartomány meghatározása:

optTartNormal( );

$$\left[-5, -\frac{2}{3}\right] \tag{1.3.4.2.5}$$

A megoldás ebben a tartományban:

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -5, -\frac{2}{3}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, \text{"celfugveny : "}, 30 + 6\,t\right] \tag{1.3.4.2.6}$$

A -5 ≤ t ≤ -2/3 tartományt kapjuk.
Itt z = 30 + 6t és xT=[0 , 6 , 0 ,0] a megoldás.
A -2/3-adot az els (2 + 3t) célfüggvényegyüttható szolgáltatta ezért az u1 , x1 cserét kell végrehajtanunk:

bazisChangeV(u_1, x_1);

$$\begin{bmatrix} 2 & u_1 & u_3 & x_3 & x_4 & b \\ x_1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 & 18 \\ u_2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 1 & 62 \\ x_2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 6 \\ -z & -2-3\,t & -\frac{3}{2}+t & -\frac{3}{2}+3\,t & 5+9\,t & -66-60\,t \end{bmatrix} \tag{1.3.4.2.7}$$

optTartNormal( );

$$\left[-\frac{2}{3}, -\frac{5}{9}\right] \tag{1.3.4.2.8}$$

$eredmMentKiir(\ );$

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{9}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 18, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, \text{"celfugveny : "}, 66 + 60\,t\right] \tag{1.3.4.2.9}$$

A t = -5/9 karakterisztikus pontot a negyedik célfügvény együttható adta ezért az x2 , x4 cserét kell végrehajtani:

$bazisChangeV\left(x_2, x_4\right);$

$$\begin{bmatrix} 3 & u_1 & u_3 & x_3 & x_2 & b \\ x_1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 36 \\ u_2 & 1 & -1 & 7 & -1 & 56 \\ x_4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 6 \\ -z & -2-3\,t & -4-\frac{7}{2}\,t & 1+\frac{15}{2}\,t & -5-9\,t & -96-114\,t \end{bmatrix} \tag{1.3.4.2.10}$$

$optTartNormal(\ );$

$$\left[-\frac{5}{9}, -\frac{2}{15}\right] \tag{1.3.4.2.11}$$

$eredmMentKiir(\ );$

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\frac{5}{9}, -\frac{2}{15}, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 36, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 6, \text{"celfugveny : "}, 96 + 114\,t\right] \tag{1.3.4.2.12}$$

A t = -2/15 karakterisztikus pontot a harmadik célfügvény együttható adta ezért az u2 , x3 cserét kell végrehajtani:

$bazisChangeV\left(u_2, x_3\right);$

$$\left[\left[4, u_1, u_3, u_2, x_2, b\right], \left[x_1, \frac{8}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{20}{7}, 44\right], \left[x_3, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, 8\right], \left[x_4, \frac{1}{14}, \frac{3}{7}, \frac{1}{14}, \frac{13}{14}, 10\right], \left[-z, -\frac{15}{7} - \frac{57}{14}\,t, -\frac{27}{7} - \frac{17}{7}\,t, -\frac{1}{7} - \frac{15}{14}\,t, -\frac{34}{7} - \frac{111}{14}\,t, -104\right. \tag{1.3.4.2.13}$$

$-174\,t]]$

optTartNormal( );

$$\left[-\frac{2}{15},\ \infty\right] \qquad \textbf{(1.3.4.2.14)}$$

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\frac{2}{15},\ \infty,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1=44,\ x_2=0,\ x_3=8,\ x_4=10,\ \text{"celfugveny : "},\ 104+174\,t\right] \qquad \textbf{(1.3.4.2.15)}$$

Sikerült a teljes [- végtelen , végtelen] tartományt lefednünk.
Az eredmények összegzését a "osszeredmKiir" eljárással jeleníthetjük meg.
Mj: az eljárás maximum 10 karakterisztikus intervallumig képes az összegzésre.

osszeredmKiir( );

$$\left[\left[\left[\left[\left[\{\ \},\ \text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\frac{2}{15},\ \infty,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1=44,\ x_2=0,\ x_3=8,\ x_4=10,\ \text{"celfugveny : "},\ 104+174\,t,\ \text{" "}\right],\right.\right.\right.\right.$$
$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\frac{5}{9},\ -\frac{2}{15},\ \text{" x Optimális : "},\ x_1=36,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=6,\ \text{"celfugveny : "},\ 96+114\,t,\ \text{" "}\Big],$$
$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{5}{9},\ \text{" x Optimális : "},\ x_1=18,\ x_2=6,\ x_3=0,\ x_4=0,\ \text{"celfugveny : "},\ 66+60\,t,\ \text{" "}\Big],$$
$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -5,\ -\frac{2}{3},\ \text{" x Optimális : "},\ x_1=0,\ x_2=6,\ x_3=0,\ x_4=0,\ \text{"celfugveny : "},\ 30+6\,t,\ \text{" "}\Big],$$
$$\text{"Karakterisztikus intervallum : "},\ -\infty,\ -5,\ \text{" x Optimális : "},\ x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=0,\ \text{"celfugveny : "},\ 0,\ \text{" "}\Big] \qquad \textbf{(1.3.4.2.16)}$$

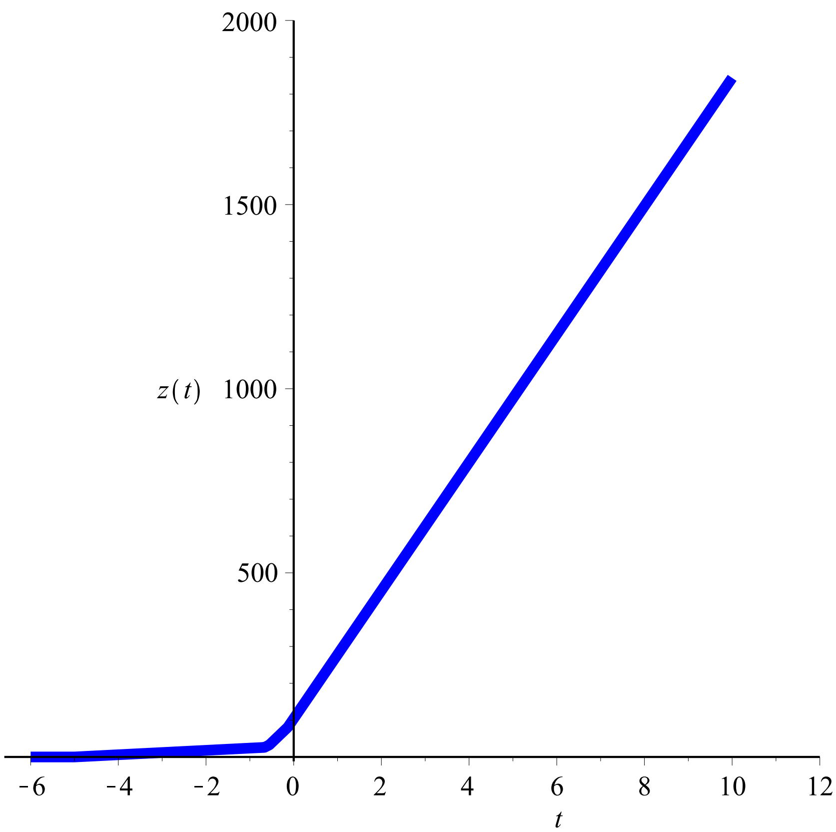
A szokásos táblázatos megjelenítés:

Karakterisztikus intervallum :	z (t)	x *optimális*
$-\infty \le t \le -5$	0	$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=0$

$-5 \le t \le -\frac{2}{3}$	$30 + 6t$	$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0$
$-\frac{2}{3} \le t \le -\frac{5}{9}$	$66 + 60t$	$x_1 = 18, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0$
$-\frac{5}{9} \le t \le -\frac{2}{15}$	$96 + 114 \cdot t$	$x_1 = 36, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 6$
$-\frac{2}{15} \le t \le \infty$	$104 + 174t$	$x_1 = 44, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 10$

A célfüggvény z(t) grafikonját pedig automatikusan - az eredménytMentKiir eljárásból - megjelenít eljárás pedig az osszcelfvRajzol eljárás.
Mj: $osszcelfvRajzol(ztmin, ztmax)$; eljárás maximum 10 karakterisztikus intervallumig alkalmas!

$osszcelfvRajzol(-10, 1000)$;



Példafeladat 7. (Több alternatív optimum egy karakterisztikus pontban) (Forrás: Mulati Gabriella 2004.)

Speciális feladat:

x1- 2 x2 + x3 ≤ 40
x2 - x3 ≤ 16
- x1+ x2 + x3 ≤ 8

z = (2 - t) x1 - x2 - (t - 1) x3 = max.

$x_1 - 2\cdot\ x_2 + \quad x_3 \le 40,$
$x_2 - \quad x_3 \le 16,$
$-\quad x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \le 8$

$(2 - \quad t)\cdot x_1 + x_2 + (1 - t)\cdot x_3$

unassign('*t*') :
paramInput7( ) :
induloTabla( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & -2 & 1 & 40 \\ u_2 & 0 & 1 & -1 & 16 \\ u_3 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ -z & 2-t & 1 & 1-t & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.4.3.1)}$$

optTartNormal( );

[*No common range*, *Never optimal*] **(1.3.4.3.2)**

Ez a tábla sosem optimális. Els szükséges báziscsere:

bazisChangeV(u_3, x_2);

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_3 & x_3 & b \\ u_1 & -1 & 2 & 3 & 56 \\ u_2 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ -z & 3-t & -1 & -t & -8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4.3.3)}$$

optTartNormal( );

$$[3, \infty] \quad \textbf{(1.3.4.3.4)}$$

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", 3, ∞, " x Optimális : ", $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 0$, "celfugveny : ", 8] **(1.3.4.3.5)**

bazisChangeV(u_2, x_1);

$$\begin{bmatrix} 2 & u_2 & u_3 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ x_2 & 1 & 0 & -1 & 16 \\ -z & -3+t & 2-t & -3t+6 & -32+8t \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4.3.6)}$$

optTartNormal( );

$$[2, 3] \quad \textbf{(1.3.4.3.7)}$$

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", 2, 3, " x Optimális : ", $x_1 = 8$, $x_2 = 16$, $x_3 = 0$, "celfugveny : ", $32 - 8t$] **(1.3.4.3.8)**

bazisChangeV(u_1, u_3);

$$\begin{bmatrix} 3 & u_2 & u_1 & x_3 & b \\ u_3 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 2 & 1 & -1 & 72 \\ x_2 & 1 & 0 & -1 & 16 \\ -z & -5+2t & -2+t & -2t+4 & -160+72t \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4.3.9)}$$

Az optimalitási tartományt vizsgálva speciális eredményt kapunk:

optTartNormal( );

$$[2, 2] \tag{1.3.4.3.10}$$

Megállapíthatjuk, hogy a t = 2-es pontban egyszerre nulla mind a második mind a harmadik célfüggvény együttható, ezért kaptuk ezt az egy pontból álló tartományt.
(2 - t) = 0 és (- 3*t + 6) = 0

eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : ", 2, 2, " x Optimális : "}, x_1 = 72, x_2 = 16, x_3 = 0, \text{"celfugveny : "}, 160 - 72\,t\right] \tag{1.3.4.3.11}$$

Végezzünk báziscserét a harmadik együttható a (-2t+4) felett:

bazisChangeV(u_3, x_3);

$$\begin{bmatrix} 4 & u_2 & u_1 & u_3 & b \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 3 & 2 & 1 & 136 \\ x_2 & 2 & 1 & 1 & 80 \\ -z & -9+4\,t & -6+3\,t & -4+2\,t & -416+200\,t \end{bmatrix}$$

optTartNormal( );

$$[-\infty, 2]$$

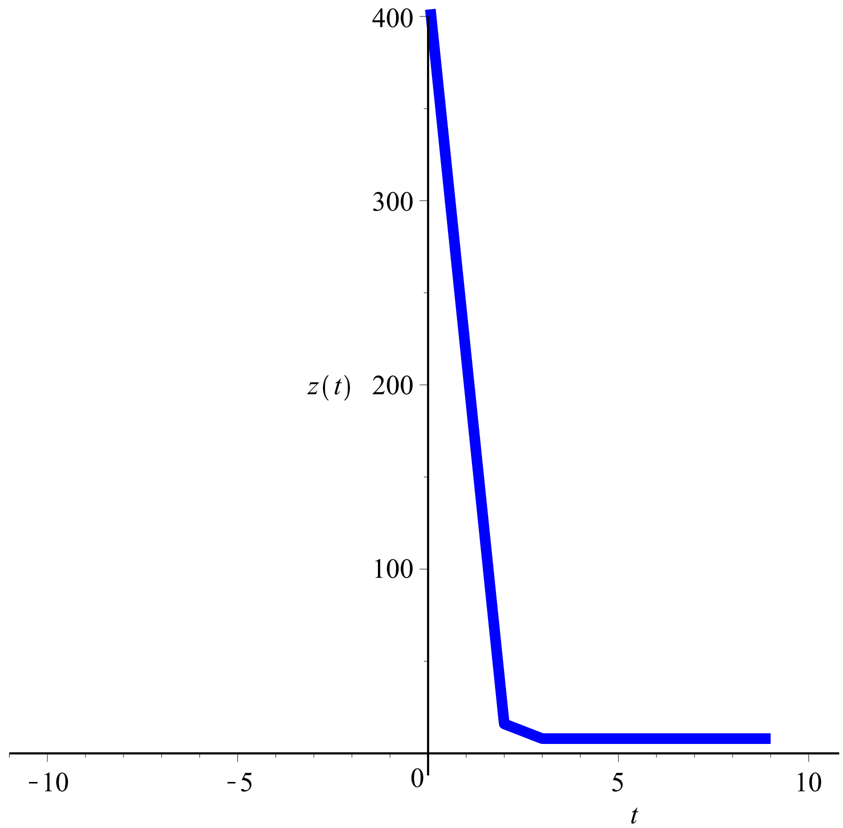
eredmMentKiir( );

$$\left[\text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, 2, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 136, x_2 = 80, x_3 = 64, \text{"celfugveny : "}, 416 - 200\,t\right] \tag{1.3.4.3.14}$$

osszeredmKiir( );

$$\Big[\Big[\Big[\Big[\Big[\{\,\}, \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, 2, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 136, x_2 = 80, x_3 = 64, \text{"celfugveny : "}, 416 - 200\,t, \text{"   "}\Big], \text{"Karakterisztikus intervallum : "}, -\infty, 2, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 136, x_2 = 80, x_3 = 64, \text{"celfugveny : "}, 416 - 200\,t, \text{"   "}\Big], \text{"Karakterisztikus intervallum : ", 2, 2, " x Optimális : "}, x_1 = 72, x_2 = 16, x_3 = 0, \text{"celfugveny : "}, 160 - 72\,t, \text{"   "}\Big], \text{"Karakterisztikus intervallum : ", 2, 3, " x Optimális : "}, x_1 = 8, x_2 = 16, x_3 = 0, \text{"celfugveny : "}, 32 - 8\,t, \text{"   "}\Big], \text{"Karakterisztikus intervallum : ", 3, } \infty, \text{" x Optimális : "}, x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = 0, \text{"celfugveny : ", 8, "   "}\Big] \tag{1.3.4.3.15}$$

osszcelfvRajzol(-10, 200);



Vegyük észre, hogy a 3. táblában ahol két együttható egyszerre adott nulla értéket alternatív optimum értékeket határozhatunk meg:

Állítsuk el ehhez ismét a 3. táblát és adjuk meg t-nek ezt a 2-es értéket. Ez legegyszerbben ismételt beolvasással és báziscserékkel lehetséges.

unassign('*t*') :
paramInput7( ) :
induloTabla( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & -2 & 1 & 40 \\ u_2 & 0 & 1 & -1 & 16 \\ u_3 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ -z & 2-t & 1 & 1-t & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.4.3.16}$$

$bazisChangeV(u_3, x_2)$, $bazisChangeV(u_2, x_1)$, $bazisChangeV(u_1, u_3)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_3 & x_3 & b \\ u_1 & -1 & 2 & 3 & 56 \\ u_2 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ -z & 3-t & -1 & -t & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_2 & u_3 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ x_2 & 1 & 0 & -1 & 16 \\ -z & -3+t & 2-t & -3t+6 & -32+8t \end{bmatrix}, \qquad (1.3.4.3.17)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & u_2 & u_1 & x_3 & b \\ u_3 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 2 & 1 & -1 & 72 \\ x_2 & 1 & 0 & -1 & 16 \\ -z & -5+2t & -2+t & -2t+4 & -160+72t \end{bmatrix}$$

optTartNormal( );

$$[2, 2] \qquad (1.3.4.3.18)$$

Megadva ekkor t-nek ezt az értéket:

$t := 2 :$

Báziscserét végrehajtva

bazisChangeV(u_3, x_3);

$$\begin{bmatrix} 4 & u_2 & u_1 & u_3 & b \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 3 & 2 & 1 & 136 \\ x_2 & 2 & 1 & 1 & 80 \\ -z & -1 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \qquad (1.3.4.3.19)$$

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", 2, 2, " x Optimális : ", $x_1 = 136$, $x_2 = 80$, $x_3 = 64$, "celfugveny : ", 16] **(1.3.4.3.20)**

bazisChangeV(x_3, u_1);

$$\begin{bmatrix} 5 & u_2 & x_3 & u_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 1 & 64 \\ x_1 & 1 & -2 & -1 & 8 \\ x_2 & 1 & -1 & 0 & 16 \\ -z & -1 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

eredmMentKiir( );

["Karakterisztikus intervallum : ", 2, 2, " x Optimális : ", $x_1 = 8$, $x_2 = 16$, $x_3 = 0$, "celfugveny : ", 16] **(1.3.4.3.22)**

Összefoglalva:

Láthattunk egy olyan példát amelyben egy karakterisztikus pontban több alternatív optimuma is volt a feladatnak. Ezt a 't' paraméter ezen értékével történt megadáskor a bázicserékkel tudtuk elállítani.

Összefoglalás:

Ezen fejezetben a (klasszikus) célfüggvényben egyetlen lineáris paraméterrel rendelkez feladatok Szimplex módszer alapú kezelési módszerét mutattuk be.
A normál és módosított normál LP feladatok kezelésen elepulva elször el kell érnünk, hogy lehetésge bázis megoldásról induljon a visgálat. Ez normál feladat esetén adott, míg módosított normál vagy általános feladat esetén - a tanultaknak megfelelen - ezt elször el kell érnünk. (Lásd ott, illetve az itteni példákban részletesebben.) Amennyiben sikerült akkor minden esetben azt kell vizsgálnunk, hogy létezik-e olyan ('t') paraméter tartomány, amelyben az adott, aktuális tábla optimális. Ha igen akkor leolvassuk a megoldást, mely ezen intervallumban optimális. Majd kilépünk a tartomány (valamelyik) szélén és ismételten ezt tesszük.

Szerepeljenek itt a lehetséges típusok:

A parametrikus programozási feladatok típusainak összefoglalása

Normál típusú parametrikus programozási feladat
Módosított normál típusú parametrikus programozási feladat
Általános típusú parametrikus programozási feladat
1. Egyoldalas, els tábla is lehet optimális
2. Egyoldalas els tábla sosem optimális
3. Kétoldalas els tábla lehet optimális
4. Kétoldalas els tábla sosem lehet optimális
 (vagy mert pozitív érték van a célfüggvény sorában, vagy mivel a tartományoknak nincs közös része)

Specialitások:
a.) - Olyan feladat melynél van olyan karakterisztikus intervallum ahol a feladat nem rendelkezik optimális megoldással
b.) - Olyan feladat melynél van olyan karakterisztikus intervallum ahol a feladat alternatív optimum megoldással rendelkezik
c.) - Olyan feladat melynél van olyan karakterisztikus pont ahol a feladatnak – több mint kettő - alternatív optimuma van.

Módosított normál típusú parametrikus programozási feladat
Ekkor az els tábla sosem lehet optimális, mivel elször az egyenlséges síkokra kell rálépnünk, és megengedhet bázis megoldást találnunk. Csak utána foglalkozhatunk a célfüggvényben szerepl paramétertl való függéssel.
Ez esetben a fenti esetek közül azt egy vagy két oldalas is elfordulhat, illetve az a. b. c. speciális esetek is.

Általános típusú parametrikus programozási feladat
Hasonlóan a módosított normál típusú parametrikus programozási esethez itt is elször azon módosított normál feladat megengedhet megoldásának megkeresése a feladat, melyre az általános feladat visszavezethet.
Ezért a módosított normálnál megfogalmazottak az érvényesek - melyet nem részletezünk ismét.

Feladatbank: Gyakorló feladatok

1. Adja meg az alábbi parametrikus feladat optimális megoldását a paraméter [0 , 10] tartományában!

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 - x_3 &\le 8 \\ x_2 + x_3 &\le 12 \\ x_1 - x_2 + 4\cdot x_3 + x_4 &\le 20 \\ \hline z = x_1 + (2\,t)\cdot x_2 + (t-1)\cdot x_3 + t\cdot x_4 &= \text{max.} \end{aligned}$$

ahol $x_1, x_2, x_3\ \ x_4$ nemnegatív

2. Adja meg az alábbi parametrikus feladat optimális megoldását a paraméter [0 , 10]

$$\begin{aligned} 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 &\le 6 \\ -2\cdot x_1 + 14\cdot x_3 &\le 200 \\ x_1 + 4\,x_2 &\le 120 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 &\le 100 \\ \hline z = (100 - t)\,x_1 + (120 - 3\,t)\,x_2 &= \text{max.} \end{aligned}$$

ahol x_1, x_2, x_3 nemnegatív

3. Adja meg az alábbi parametrikus programozási feladat megoldását (a célfüggvény változását grafikonon a paraméter függvényében) az alábbi információk alapján, a paraméter -3-tól 1-ig terjedő tartományában! x1 , x2 , x3 ≥ 0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 20 \\ x_2 &\le 10 \\ x_1 + 4\,x_2 &\le 120 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 &\le 100 \\ \hline z = (100 - t)\,x_1 + (120 - 3\,t)\,x_2 &= \text{max.} \end{aligned}$$

ahol x_1, x_2, nemnegatív

4. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter (-5 , 10) illetve (-100 , 100) –ig terjedő értékeire.

$x1 , x2 , x3 \geq 0$

$2\,x1 + 2\,x2 \leq 6$

$-2\,x1 + 4\,x3 \leq 20$

$x2 + 2\,x3 \leq 10$

$z = (2 + 4t)\,x1 - 2\,x2 + (2t)\,x3 = \max.$

5. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait! x1 , x2 , x3 nem negatívak

$x1 + 5\,x3 \leq 10$

$-x1 + 2\,x2 \leq 4$

$z = (4 + t)\,x1 + 2\,x2 + (1 + 0.5t)\,x3 = \max.$

6. Adja meg az alábbi parametrikus programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [0, +10] - ig terjed tartományában.

$x1 , x2 \geq 0$

$x1 + 5\,x3 + x4 \leq 10$

$-x1 + 2\,x2 + 2\,x4 \leq 22$

$z = (4 - t)\,x1 + 2\,x2 - 0.5t\,x3 + (8 - t)\,x4 = \max.$

7. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [0, +10] - ig terjed tartományában.

$x1 , x2 \geq 0$

$x1 + x2 \leq 8$

$x1 + 2\,x2 \leq 13$

$z = (4 + t)\,x1 + (2 + 2t)\,x2 = \max.$

8. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [0, +10] - ig terjed tartományában.

$x1 , x2 \geq 0$

$x1 - x2 \leq 8$

$x1 + x2 \leq 4$

$z = (2 - t)\,x1 + (t - 1)\,x2 = \max.$

9. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [-10, +10] - ig terjed tartományában.

$2\,x1 + 2\,x2 \leq 6$

$-2\,x1 + 4\,x3 \leq 20$

$x2 + 2\,x3 \leq 10$

$z = (2 + 4t)\,x1 - 2\,x2 + (2t)\,x3 = \max.$

10. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [1, 5] - ig terjed tartományában.

$x1 , x2 , x3 \geq 0$

$2 x1 - x2 + x3 \leq 24$

$x1 + x2 \leq 40$

$x1 + 2 x3 \leq 20$

$z = (1 - 3t) x1 + (2-2t) x2 + (3-t) x3 = max$

11.□Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter (0, 60) tartományában!

$x1 , x2 , x3 , x4 \geq 0$

□ $3 x1 + x2 - 2 x3$□ 40

□ $5 x1 - 2 x2 + 8 x3 + 3 x4 \quad 80$

□ $z = (5-t) x1 + 2 x2 + (t-10) x3 – 2t x4 = max.$

12.□Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter (-10,10) tartományában!□

$x1 , x2 \geq 0$

□ $6 x1 + 12 x2 \quad 96$

$x1 \leq 12$

□ $x1 - 2 x2 \quad 8$

□ $- x1 + 2 x2 \quad 16$

$z = (7-t) x1 + (2+t) x2 = max.$

13.□Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter (0, 10) tartományában!

$x2 , x1 , x3 , x4 \geq 0$

□ $3 x1 + x2 - 2 x3$□ 40

□ $5 x1 - 3 x2 + 8 x3 + 3 x4 \quad 60$

□ $z = (5-t) x1 + 3 x2 + (t-10) x3 – 2t x4 = max.$

14.□Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [0, 10] - ig terjed tartományában.□

$x1 , x2 , x3 \geq 0$

$x1 + 3 x3 \leq 9$

$-4 x1 + 4 x2 + 2 x3 \leq 12$

$z = (1 - t) x1 + 2 x2 + (6 - 2t) x3 = max$

15.□Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter (-1, 1) tartományában!

$x2 , x1 , x3 , x4 \geq 0$

□ $x1$ □+ $x3$□- $x4$ □10

□ $2 x2 - x3 + 2 x4 \quad 30$

$z = (-6-t) x1 + 2 x2 + (t-1) x3 + 4t x4 = max.$

16.□Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [-1 , 1 000] tartományában! $x1 , x2 \geq 0$

$x1 + 6\ x2 \le 24$

$-2\ x1 + 4\ x2 \le 10$

$z = (1 + t)\ x1 + (-4-2t)\ x2 = max$

17. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [-5 , 5] tartományában! $x1 , x2 \ge 0$

$x1 \le 4$

$x1 + 2\ x2 \le 8$

$z = (-1- 4t)\ x1 + (2-2t)\ x2 = max$

18. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait a paraméter [1, 5] - ig terjed tartományában!

$x1 , x2 , x3 \ge 0$

$2\ x1 + x3 = 12$

$- 2\ x2 + 4\ x3 \le 40$

$x1 + 2\ x2 \le 20$

$z = (4 + 2\ t)\ x\ 1 - (3 + t)\ x2 + (2 + 4\ t)\ x3 = max.$

19. Adja meg az alábbi paraméteres programozási feladat optimális megoldásait!

$2\ x1 + x3 \ge 6$

$- 2\ x2 + 4\ x3 \le 40$

$x1 + 2\ x2 \le 20$

$z = (4 + 2\ t)\ x\ 1 - (3 + t)\ x2 + (2 + 4\ t)\ x3 = max.$

20. Adja meg az alábbi parametrikus programozási feladat optimális megoldását a paraméter 1-tl 10-ig terjed tartományában!

$x1 , x2 \ge 0$

$2\ x1 + 8\ x2 \le 24$

$- x1 + 4\ x2 \le 16$

$z = (1+t)\ x1 + (-6-t)\ x2 = max.$

21. Adja meg az alábbi parametrikus LP feladat optimális megoldását a paraméter 1-tl 10-ig terjedő tartományában! $x1 , x2 \ge 0$

$4\ x1 + 8\ x2 \le 32$

$-3\ x1 + 4\ x2 \le 12$

$z = (1+2t)\ x1 + (-8-t)\ x2 = max.$

22. Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter [0, 10] tartományában! $x1 , x2 , x3 , x4 \ge 0$

$3\ x1 + 2\ x3 - x4 \le 20$

$2\ x2 + 4\ x4 \quad 40$

$x1 + x2 + x4 \quad 10$

$z = (8\text{-}2t)\ x1 - 3\ x2 + 4\ x3 - (2+2t)\ x4 = \max.$

23. Adja meg az alábbi parametrikus programozási feladat optimális megoldását a paraméter [-1, 1] –es tartományában!

$x1,\ x2,\ x3 \geq 0$

$-3\ x1 - 2\ x2 + x3$

30

$x1 + 2\ x2 - x3 \leq 80$

$x2 \quad 10$

$z = (-14\text{-}23t)\ x1 + 4\ x2 + 2t\ x3 = \max.$

24. Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter (1, 5) tartományában!

$x1,\ x2,\ x3,\ x4 \geq 0$

$3\ x1 + 2\ x3 - x4 \quad 20$

$x2 + 4\ x4 \quad 40$

$x1 + x2 + x4 \quad 10$

$z = (4\text{-}t)\ x1 - 2\ x2 + 3\ x3 - (4+4t)\ x4 = \max.$

25. Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter [0, 10] tartományában!

$x1,\ x2,\ x3,\ x4 \geq 0$

$2\ x1 + 2\ x3 - x4 \quad 20$

$2\ x2 + 4\ x4 \quad 40$

$x1 + x2 + x4 \quad 10$

$z = (8\text{-}2t)\ x1 + 3\ x2 - 4\ x3 - (2+2t)\ x4 = \max.$

26. Adja meg az alábbi LP feladat optimális megoldását a paraméter függvényében a $t \in [-10,10]$ tartományban!

$x1, x2, x3 \geq 0$

$x1 + x2 + 2\ x3 \leq 20$

$2\ x2 + x3 \leq 16$

$x1 + 2\ x2 \leq 10$

$z = (2+t)x1 + (2-t)x2 + (t-2)x3 = \max.$

27. Adja meg az alábbi parametrikus lineáris programozási feladat optimális megoldását az alábbi információ alapján, a paraméter –1 től + 10 – ig terjedő intervallumában

ha $0 \leq x1,\ x2,\ x3$

$x1 + 2\ x2 - x3 >= 14$

$x1 + x3 \quad 9$

$-6\ x2 + x3 \leq 12$

$z = (-11\text{-}4t)\ x1 + (3\text{-}2t)\ x2 + (-4+3t)\ x3 = \max.$

28. Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter [0, 10] tartományában!

$x1, x2 \geq 0$

$x1 - x3 \;8$

$2x2 + x3 \;\; 12$

$z = (-2-2t)\, x1 + x2 + (2t)\, x3 = \max.$

29. Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter ($-\infty$, $+\infty$) tartományában!

ha $x1, x2 \geq 0.$

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 9 \\
x2 &\leq 5 \\
x1 &\leq 6 \\
-x1 + x2 &\leq 2 \\
x1 - 2x2 &\leq 4 \\
x1 + x2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

$z = (2 + 3t)\, x1 + (t-4)\, x2 = \max.$

30. Adja meg az alábbi parametrikus optimalizálási feladat optimális megoldását a paraméter (-20,20) tartományában!

ha $x1, x2, x3 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
2x1 - x2 + 3x3 &\leq 12 \\
4x1 + 2x2 + x3 &\;\; 30 \\
-2x2 + x3 &= 18
\end{aligned}
$$

$z = (1+2t)\, x1 + (-1+3t)\, x2 + (5t)\, x3 = \max.$

Irodalom jegyzék

Felhasznált irodalom:

Csernyák László - Jánosa András: Operációkutatás II. A gazdasági optimalizálás módszerei II. Budapest, 2004, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.

Frederick S. Hillier - Gerard J. Liebermann: Bevezetés az operációkutatásba LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

K. Sydsaeter - P. Hammond: Matematika Közgazdászoknak, Aula Kiadó, Budapest, 1998.

Ferenczi Zoltán: Operációkutatás, Készült a HEFOP 3.3.1-1.-P.-2004-09-0102/1. pályázat támogatásával, Értékünk az ember, Humán Erforrás-fejlesztési Operatív Program 2006. Lektorálta: Hajdu Ottó

Példatár az operációkutatás II. tananyaghoz (Egyéni tanulást segítkidolgozott feladatok)

Pénzügyi és Számviteli Fiskola Budapest 1996. F. Sz.: 243.

Mulati Gabriella: Parametrikus lineáris programozási feladat PPT. Kaposvári Egyetem 2004.

Programok